КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

Х. С. ХАЗАНОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ МОМЕНТОМ ЧЕРЕЗ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКУЮ КРУГЛУЮ ШАЙБУ

Обозначения

R, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки,

R_0 — радиус шайбы,

$\lambda = \frac{R}{h}$, $\varkappa = \frac{R_0}{R}$ — безразмерные параметры оболочки с шайбой,

ξ, η — безразмерные декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу линии спая R_0 (начало координат — в центре шайбы, ось ξ — по образующей),

$\rho = \frac{r}{R_0}$, θ — полярные на развертке цилиндра координаты, угол θ отсчитывается от образующей,

u, v, w — компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки,

$M_\rho, N_\rho, T_{\rho\theta}, Q_\rho^*$, — изгибающий момент, нормальная, касательная и обобщенная перерезывающая силы в сечении оболочки $\rho = \text{const}$,

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассматривается случай, когда в круглое отверстие на боковой поверхности достаточно длинной цилиндрической оболочки впаяна абсолютно жёсткая шайба. К шайбе приложен момент M, вектор которого параллелен касательной к направляющей срединной поверхности оболочки в начале координат. Предполагается, что момент уравновешивается усилиями на торцах оболочки.

Для исследования напряжённого состояния системы используется однородное дифференциальное уравнение тонкой пологой цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F = w + i\varphi$ [2], которое в безразмерных координатах имеет вид

$$\nabla^2\nabla^2 F + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \tag{1}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\ \varkappa \sqrt{\lambda}. \tag{2}$$

Поскольку рассматривается круглая шайба, то целесообразно перейти к полярным на развертке цилиндра координатам. На основании [3, 4] для симметричного относительно ξ и обратно-симметричного относительно η напряженного состояния имеем

$$w(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} w_\nu(x)\cos\nu\theta, \qquad \varphi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} \varphi_\nu(x)\cos\nu\theta, \tag{3}$$

где $x = \omega\rho$,

$$w_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) - B_n \overset{*}{\beta}_{n\nu}(x)],$$

$$\varphi_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \overset{*}{\beta}_{n\nu}(x) + B_n \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x)]. \tag{4}$$

Здесь A_n и B_n — постоянные, подлежащие отысканию из граничных условий. Функции же $\overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x)$ и $\overset{*}{\beta}_{n\nu}(x)$ определяются из соотношений

$$\overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) = -(-1)^\nu \frac{2}{\pi}[kei_n y(ber_{n-\nu} y - ber_{n+\nu} y) +$$
$$+ ker_n y(bei_{n-\nu} y - bei_{n+\nu} y)]$$
$$\overset{*}{\beta}_{n\nu}(x) = (-1)^\nu \frac{2}{\pi}[kei_n y(bei_{n-\nu} y - bei_{n+\nu} y) -$$
$$- ker_n y(ber_{n-\nu} y - ber_{n+\nu} y)], \tag{5}$$

где $y = x\sqrt{2}$.

Ряды для подсчета функций $ber_n y$, $bei_n y$, $ker_n y$ и $kei_n y$ приведены в [1].

Через функцию напряжений φ определяются усилия в срединной поверхности оболочки, а через перемещение w — моменты и перерезывающие силы. На основании [4] усилия в сечениях оболочки можно представить рядами

$$M_\rho(\rho, \theta) = -\frac{\varkappa^2 ER}{64\omega^2\lambda} \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} M_{\rho\nu}(x)\cos\nu\theta$$

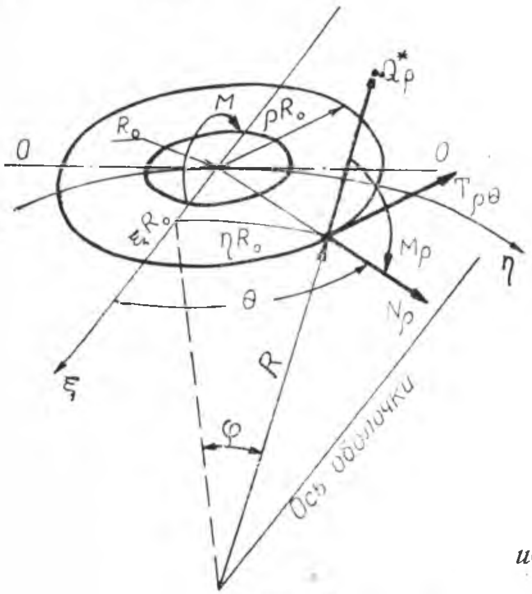
$$Q_\rho^*(\rho, \theta) = -\frac{\varkappa E}{64\omega\lambda} \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} Q_{\rho\nu}(x)\cos\nu\theta$$

$$N_\rho(\rho, \theta) = -\frac{E}{8\lambda x} \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} N_{\rho\nu}(x) \cos \nu\theta$$

$$T_{\rho\theta}(\rho, \theta) = -\frac{E}{8\lambda x} \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} \upsilon T_\nu(x) \sin \nu\theta \text{ и т. д.} \tag{6}$$

Уравнение равновесия элемента оболочки, выделенного сечением $\rho = \text{const}$ (фиг. 1), относительно оси 0 — 0, проходящей через начало координат по касательной к направляющей срединной поверхности, даёт

$$M = -\frac{\pi\varkappa E R_0^2 x}{64\omega^3\lambda}(xN_{\rho,1} - xN_{\rho,3} + 5xT_1 + 3xT_3 - xQ_{\rho,1} + M_{\rho,1}). \tag{7}$$



Фиг. 12.

Последнее равенство может быть приведено к виду

$$M = -\frac{\varkappa E R_0^2}{8\omega^3 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) \tag{8}$$

Все остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

В соответствии с [4] перемещения в срединной поверхности оболочки могут быть также представлены рядами

$$u(\rho, \theta) = \frac{\varkappa x}{8\omega} \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} u_\nu(x) \cos \nu\theta,$$

$$v_\nu(\rho, \theta) = \frac{\varkappa x}{8\omega} \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\infty} v_\nu(x) \sin \nu\theta. \tag{9}$$

Условие однозначности перемещений даёт [4] зависимость

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_n - B_n) = 0. \tag{10}$$

Граничные условия задачи при $\rho = 1$ имеют вид

$$w = \psi R_0 \cos\theta, \quad \frac{\partial w}{R_0 \partial \rho} = \psi \cos\theta.$$

$$u = a\cos\theta - \frac{\varkappa R_0\psi}{8}(\cos\theta - \cos 3\theta),$$

$$v = -a\sin\theta - \frac{\varkappa R_0\psi}{8}(5\sin\Theta + \sin 3\Theta). \qquad (11)$$

Здесь a — смещение шайбы вдоль образующей, а ψ — угол поворота шайбы.

К граничным условиям следует добавить уравнение равновесия (8) и условие однозначности перемещений (10). Ограничив в выражениях для перемещений, а также в (8) и (10) суммирование до $\nu_{max} = n_{max} = K$, получим в итоге замкнутую конечную систему алгебраических уравнений относительно постоянных A_n и B_n. После их определения могут быть подсчитаны внутренние усилия и компоненты напряжения в сечениях оболочки.

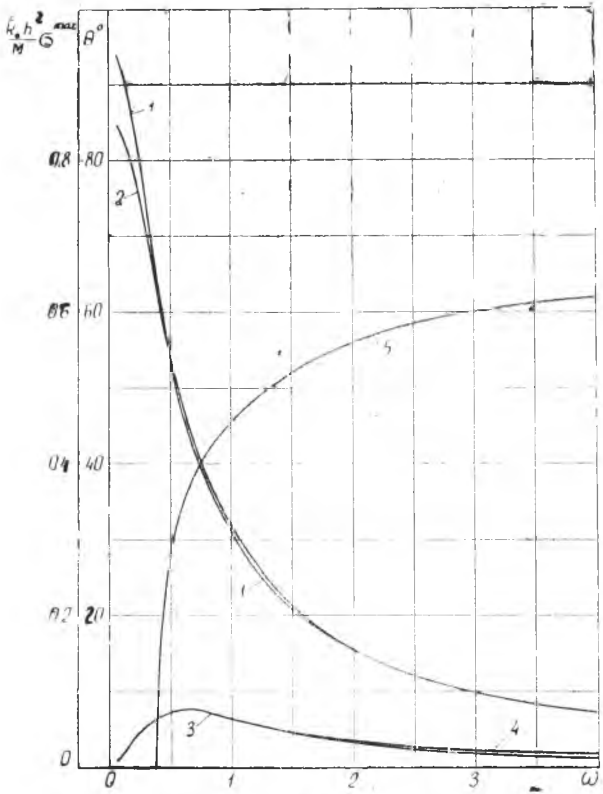
Задача была запрограммирована и просчитана на ЭЦВМ «Урал-2». Коэффициент Пуассона μ принимался равным 0,3. При этом

$$\omega = 0{,}6427\varkappa\sqrt{\lambda} = 0{,}6427\,\frac{R_0}{\sqrt{Rh}}. \qquad (12)$$

Результаты вычислений показали, что наиболее существенными являются изгибные напряжения σ_ρ^M по линии спая оболочки с шайбой, которые весьма интенсивно убывают по мере удаления от последней. Кривая 1 на фиг. 2 дает изменение максимальных изгибных напряжений в зависимости от параметра ω. Здесь же приведен график максимальных эквивалентных напряжений $\sigma_э$ на наружной поверхности оболочки (кривая 2), подсчитанных по теории прочности энергии формоизменения. Для $\omega \leqslant 0{,}375$ обе эти величины достигают наибольших значений при $\theta = 0$. Затем, с ростом ω, точка максимума начинает постепенно смещаться, как показано на кривой 5. Кривая 3 характеризует наибольшие нормальные напряжения в срединной поверхности σ_ρ^N $(\theta = 0)$, а кривая 4 — касательные напряжения $\tau_{\rho-}^T$ $(\theta = 90°)$. Напряжения кручения по линии спая равны нулю, а остальные величины могут быть здесь найдены из условия: $\sigma_\theta^M = \mu\sigma_\theta^N$, $\sigma_\theta^N = \mu\sigma_\rho^N$.

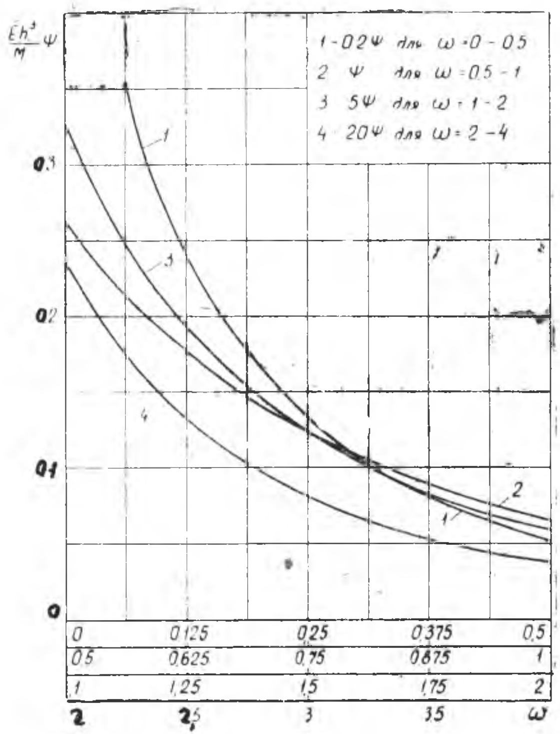
Зачастую требуется знать не только прочность, но и жесткость системы. Графики безразмерных величин, характеризующих угол поворота шайбы ψ под действием момента M, приведены на фиг. 3. Для удобства практического использования графики построены в различном масштабе для различных диапазонов ω.

Внешний момент M уравновешивается частично изгибными напряжениями в оболочке, частично — напряжениями в срединной поверхности. Обозначим через $M_{бм}$ долю момента M, уравновешиваемую безмоментными напряжениями, действующими по замкнутому контуру $\rho = \mathrm{const}$. Интересующая нас величина может быть получена из (7), если опустить $Q_{\rho,1}$ и $M_{\rho,1}$. Кривая 1 на фиг. 4 показывает зависимость от ω величины $\frac{M_{бм}}{M}$ по линии спая



1-0.2Ψ для ω=0-0.5
2 Ψ для ω=0.5-1
3 5Ψ для ω=1-2
4 20Ψ для ω=2-4

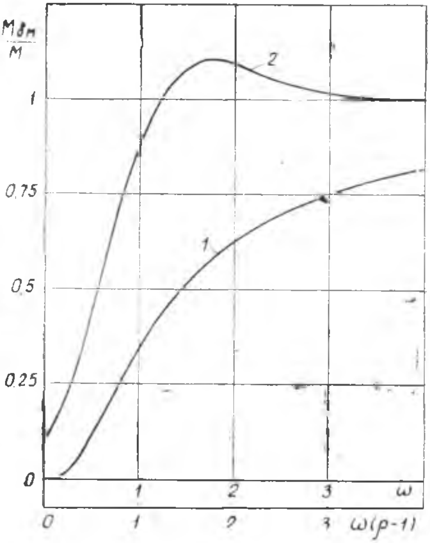
Фиг. 2.



1-0.2Ψ для ω=0-0.5
2 Ψ для ω=0.5-1
3 5Ψ для ω=1-2
4 20Ψ для ω=2-4

Фиг. 3.

оболочки с шайбой ($\rho=1$). Плоской пластине соответствует $\omega=0$. Момент M может здесь восприниматься только за счет изгибных напряжений. По мере роста ω все большая доля момента воспринимается напряжениями в срединной поверхности. Кривой 2, построенной для $\omega=0{,}5$, соответствует по оси абсцисс безразмерный параметр $\omega(\rho-1)=0{,}06427\frac{zRh}{\sqrt{R_0}}$ характеризующий расстояние от шайбы до сечения $\rho=\text{const}$. При $\omega(\rho-1)=3{,}5$ величина $\frac{M_{\delta м}}{M}$ отличается от 1 всего лишь на 0,5%, т.е. здесь заканчивается зона, возмущенная изгибными напряжениями; и момент M практически уравновешивается уже только безмоментными нормальными σ_ρ^N и касательными τ_θ^T напряжениями.



Фиг. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Б. Двайт. Таблица интегралов и другие математические формулы. ИЛ, Москва, 1948.
2. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1947.
3. Г. Н. Савин, А. Н. Гузь. К вопросу о концентрации напряжений около отверстий в цилиндрической оболочке. Доповіді АН УРСР, № 11, 1964.
4. Х. С. Хазанов. К расчёту цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXIX, 1967.