ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. I, 1974

Б.А.Горлач, А.В.Киреев

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТОМ

Принятые обозначения

ψ – угловое расстояние точки срединной поверхности оболочки, отсчитываемое от вершины;

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – изменения главных кривизн, умноженные на радиус оболочки;

ε_1, ε_2 – относительные удлинения срединной поверхности оболочки;

ϑ – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;

u, w – перемещения точки срединной поверхности оболочки в направлении, касательном к образующей и, соответственно, нормальном к срединной поверхности, отнесенные к толщине оболочки;

δ – толщина оболочки;

M – изгибающий момент вдоль меридиана оболочки;

Q – перерезывающая сила;

G – модуль сдвига;

μ – коэффициент Пуассона;

N_1, N_2 – осевые усилия;

F, J – площадь и момент инерции сечения шпангоута.

Исследуется напряженное состояние осесимметрично нагруженной сферической оболочки, подкрепленной упругим шпангоутом (рис.I). При выводе дифференциальных уравнений учтена возможность работы материала за пределом упругости, а перемещения считаются соизмеримыми с толщиной оболочки.

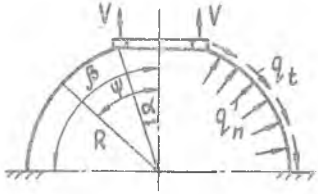

Рис. I.

I. Преобразуя уравнения равновесия и совместности деформаций оболочек среднего прогиба [I, 2], можно получить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений изгиба сферической оболочки, которую запишем в виде, удобном для решения методом последовательных приближений (n – процесс):

$$
\begin{aligned}
&\ell[\varepsilon^{(n)}]+\mu\varepsilon^{(n)}=-(1-\mu)\text{æ}^{(n)}+q_{\varepsilon}^{(n)}\\
&\ell[\text{æ}^{(n)}]-\mu\text{æ}^{(n)}=12m^2[(1+\mu)\varepsilon^{(n)}+q_{\text{æ}}^{(n)}]\\
&\zeta^{(n)'}+2\zeta^{(n)}\operatorname{ctg}\psi=K_0[-K_\zeta\varepsilon^{(n)'}-\frac{1}{12m^2}\text{æ}^{(n)'}+q_\zeta^{(n)}]\\
&\tau^{(n)'}+2\tau^{(n)}\operatorname{ctg}\psi=K_0[K_\tau\text{æ}^{(n)'}-\varepsilon^{(n)'}+q_\tau^{(n)}].
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

Здесь

$$\ell=\frac{d^2}{d\psi^2}+\operatorname{ctg}\psi\frac{d}{d\psi}+1 \qquad (2)$$

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\quad \text{æ}=\text{æ}_1+\text{æ}_2,\quad \zeta=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\quad \tau=\text{æ}_1-\text{æ}_2, \qquad (3)$$

q_ε, $q_{\text{æ}}$, q_ζ, q_τ – функции, зависящие от внешней нагрузки и величин, учитывающих физическую и геометрическую нелинейности.

Штрих означает дифференцирование по аргументу ψ.

Решение системы (I) в " n "-ном приближении имеет вид [2]:

$$\varepsilon^{(n)}=2\gamma(1-\mu)[C_1^{(n)}p_1+D_1^{(n)}q_1+C_2^{(n)}p_2+D_2^{(n)}q_2]+\varepsilon_q+\varphi^{(n)}\varepsilon_H^{(n)}$$

$$\text{æ}^{(n)}=-2\gamma\lambda[C_1^{(n)}q_1-D_1^{(n)}p_1+C_2^{(n)}q_2-D_2^{(n)}p_2]+\text{æ}_q+\varphi^{(n)}\text{æ}_H^{(n)}$$

$$\zeta^{(n)} = \frac{2\kappa C_0^{(n)}}{\sin^2\psi} - 2\gamma(1+\mu)[C_1^{(n)} r_1 + D_1^{(n)} s_1 + C_2^{(n)} r_2 + D_2^{(n)} s_2] + \zeta_q + \varphi^{(n)} \zeta_H^{(n)}$$

$$\tau^{(n)} = -2\gamma\lambda[C_1^{(n)} s_1 - D_1^{(n)} r_1 + C_2^{(n)} s_2 - D_2^{(n)} r_2] + \tau_q + \varphi^{(n)} \tau_H^{(n)}.$$

Здесь $\varphi^{(n)}$ - множитель, вводимый согласно методу подобных итераций [4]. В нашем случае этот множитель может быть вычислен следующим образом:

$$\varphi^{(n)} = \frac{æ^{(0)}(\beta)}{æ^{(n-1)}(\beta) - \Delta æ^{(n)}(\beta)}, \tag{4}$$

где

$$\Delta æ^{(n)}(\beta) = -2\gamma\lambda[\Delta C_1^{(n)} q_1(\beta) - \Delta D_1^{(n)} p_1(\beta) + \Delta C_2^{(n)} q_2(\beta) - \Delta D_2^{(n)} p_2(\beta)] + æ_H^{(n)}(\beta) \tag{5}$$

$$\lambda = \sqrt{12m^2(1-\mu^2) - \mu^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2(\lambda^2+\mu^2)}, \quad K = \frac{m}{4\pi G R^2}, \tag{6}$$

$C_1^{(n)}, D_1^{(n)}, C_2^{(n)}, D_2^{(n)}, C_0^{(n)}$ - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

$s_i, r_i, p_i, q_i, g_i, h_i$ выражаются через функции Томсона ($i = 1,2$).

Частные решения $\varepsilon_H^{(n)}$ и $æ_H^{(n)}$ определяются в n-ном приближении после реализации процесса последовательных приближений (K -процесс) [5]:

$$\varepsilon_{H(K)}^{(n)} = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{\sin\psi} \int_{\psi_0}^{\psi_1} [\Gamma_\varepsilon^{(n)} + \Phi_\varepsilon^{(n)} - (1+\mu)\varepsilon_{H(K-1)}^{(n)} - (1-\mu)æ_{H(K-1)}^{(n)}] \sin\psi_1 \, d\psi_1 \, d\psi \tag{7}$$

$$æ_{H(K)}^{(n)} = 12m^2 \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{\sin\psi} \int_{\psi_0}^{\psi_1} [\Gamma_æ^{(n)} + \Phi_æ^{(n)} - \frac{(1-\mu)}{12m^2} æ_{H(K-1)}^{(n)} + (1+\mu)\varepsilon_{H(K-1)}^{(n)}] \sin\psi_1 \, d\psi_1 \, d\psi \tag{8}$$

После этого находятся $\zeta_H^{(n)}$ и $\tau_H^{(n)}$:

$$\zeta_H^{(n)} = \frac{K_0}{\sin^2\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} [-K_\zeta \varepsilon_H^{(n)\prime} - \frac{1}{12m^2} æ_H^{(n)\prime} + \Gamma_\zeta^{(n)} + \Phi_\zeta^{(n)}] \sin^2\psi \, d\psi \tag{9}$$

$$\tau_H^{(n)} = \frac{K_0}{\sin^2\psi} \int_{\psi_0}^{\psi} [K_\tau æ_H^{(n)\prime} - \varepsilon_H^{(n)\prime} + \Gamma_\tau^{(n)} + \Phi_\tau^{(n)}] \sin^2\psi \, d\psi. \tag{10}$$

Значения Γ и Φ определяются согласно [5] и зависят от геометрической и физической нелинейностей, ψ_0 - начальное значение угла ψ.

Функции ε_q, $æ_q$, ζ_q, τ_q - частные решения уравнения (I), соответствующие внешней нагрузке.

Выражения для перемещений можно получить интегрированием нелинейных уравнений, связывающих деформации с перемещениями [2]:

$$u^{(n)} = C^{(n)}\sin\psi + mkC_0^{(n)}\left(\sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi\right) + (1+\mu)m\gamma\left[C_1^{(n)}g_1 + D_1^{(n)}h_1 + C_2^{(n)}g_2 + D_2^{(n)}h_2\right]\operatorname{tg}\psi + u_q + \varphi^{(n)}u_H^{(n)} \qquad (11)$$

$$w^{(n)} = C^{(n)}\cos\psi - mkC_0^{(n)}\left(1 + \cos\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) + 2m\gamma\left[C_1^{(n)}p_1 + D_1^{(n)}q_1 + C_2^{(n)}p_2 + D_2^{(n)}q_2\right] + w_q + \varphi^{(n)}w_H^{(n)}. \qquad (12)$$

Здесь $C^{(n)}$ – постоянная интегрирования,

$$u_q = m\sin\psi\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{\zeta_q}{\sin\psi}\,d\psi, \quad u_H^{(n)} = m\sin\psi\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{1}{\sin\psi}\left[\zeta_H^{(n)} - \frac{(w^{(n-1)\prime})^2}{2m}\right]d\psi \qquad (13)$$

$$w_q = \frac{m}{2}(\varepsilon_q - \zeta_q) - u_q\operatorname{ctg}\psi, \quad w_H^{(n)} = \frac{m}{2}(\varepsilon_H - \zeta_H)^{(n)} - u_H^{(n)}\operatorname{ctg}\psi. \qquad (14)$$

2. Граничные условия для определения постоянных интегрирования запишем в виде

$$\varepsilon_{2c}^{(n)}(\alpha) = \varepsilon_{2ш} \equiv \frac{R^2\sin\alpha}{m(1-\mu^2)F}\,\mathcal{M}_ш \qquad (15)$$

$$\vartheta_c^{(n)} = -\vartheta_ш \equiv -\frac{\mathcal{M}_ш R^2\sin^2\alpha}{EJ} \qquad (16)$$

при $\psi = \alpha$,

$$\varepsilon_{2c}^{(n)}(\beta) = 0, \quad \vartheta_c^{(n)}(\beta) = 0, \quad w_c^{(n)}(\beta) = 0 \qquad (17)$$

при $\psi = \beta$.

Индексы " c " и " ш " означают величины, относящиеся к оболочке и соответственно к шпангоуту. Расписав эти граничные условия, получим пять линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $C_1^{(n)}$, $D_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, $D_2^{(n)}$ и $C^{(n)}$ в "n"-ном приближении.

Кроме того,

$$C_0 = 2\pi RV\sin\alpha, \qquad (18)$$

где V – погонная сила, действующая на шпангоут (рис. I). Определив постоянные интегрирования, можно вычислить все интере-

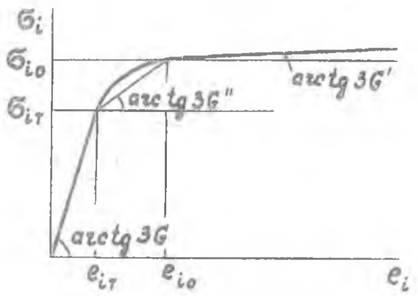
σ_i
σ_{io}
σ_{iT}
arctg 3G''
arctg 3G'
arctg 3G
e_{iT}
e_{io}
e_i

Рис. 2

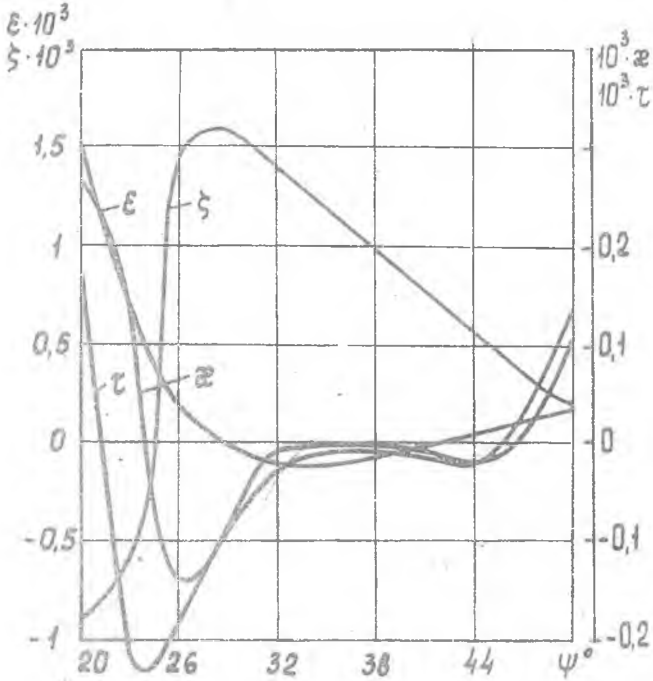
$\varepsilon \cdot 10^3$
$\zeta \cdot 10^3$
$10^3 \cdot æ$
$10^3 \cdot \tau$
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
ε
ζ
τ
æ
20
26
32
38
44
$\psi°$

Рис. 3

сующие нас величины в n -ном приближении.

На ЭВМ "М-20" были проведены расчеты со шпангоутом при следующих геометрических характеристиках:

$$R = 160 мм, \quad \delta = 1,5 мм, \quad F = 50 мм^2, \quad J = 100 мм^4,$$
$$\alpha = 20^\circ, \quad \beta = 50^\circ.$$

Оболочка выполнена из материала, имеющего (рис. 2)

$$G = 2,44\cdot 10^5 \frac{дан}{см^2}, \quad G' = 3,76\cdot 10^3 \frac{дан}{см^2}, \quad G_т = 2\cdot 10^3 \frac{дан}{см^2}$$
$$\sigma_{io} = 3\cdot 10^3 \frac{дан}{см^2}, \quad e_{io} = 6\cdot 10^{-3}, \quad \mu = \frac{1}{3}.$$

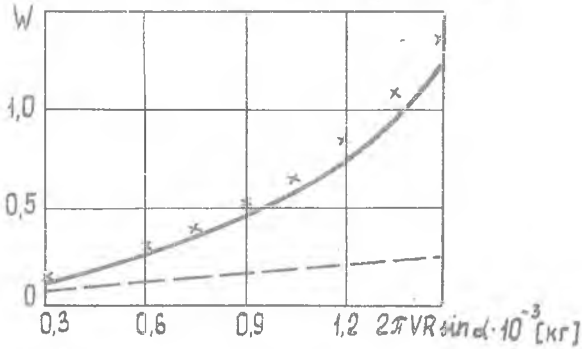

Рис. 4.

Для интегрирования вся оболочка разбивалась на 40 равных участков.

Некоторые результаты расчета приведены на рис. 3.4. Пунктирная линия соответствует расчету по линейной теории. Графики на рис. 3 построены для $V = 4$ кг/мм.

Для проверки правильности решения задачи был проведен экспемент, результаты которого приведены на рис. 4.

Литература

1. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория оболочек. Таткнигоиздат, Казань, 1957.
2. Ахмедьянов И.С. Температурные напряжения в сферической оболочке при осесимметричном нагреве. Труды КуАИ, вып. 39, Куйбышев, 1968.
3. Горлач Б.А. Физически нелинейные соотношения теории осесиммет-

ричне нагруженных оболочек вращения с учетом сжимаемости материала. Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1970.
4. Биргер И.С. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, 1956.
5. Горлач Б.А. Осесимметричный изгиб упругой сферической оболочки при конечных прогибах. Труды КуАИ, вып.48, Куйбышев, 1970.