ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 2, 1975

И.С.Ахмедьянов

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОСНОВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Как известно [I], задача о расчете сферической оболочки при произвольном нагружении сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$y_n'' + y_n' \operatorname{ctg}\psi + \left[\nu(\nu+1) - \frac{n^2}{\sin^2\psi}\right] y_n = 0, \qquad (\mathrm{I})$$

в котором y_n - искомая функция, ψ - угол между осью оболочки и внешней нормалью к срединной поверхности, ν - параметр, определяемый из соотношения

$$\nu(\nu+1) = 1 + i\lambda, \qquad (2)$$

где

$$\lambda^2 = 12(1-\mu^2)\frac{R^2}{h^2} - \mu^2,$$

причем R - радиус срединной поверхности оболочки, h - толщина оболочки, μ - коэффициент Пуассона.

Штрих означает производную по аргументу ψ .

В статье [2] приведен способ интегрирования уравнения (I), основанный на использовании решения для случая $n=0$ с последующим применением рекуррентных соотношений. Там же кратко рассмотрены различные решения этого уравнения, предложенные другими авторами.

Для оболочки, замкнутой в вершине, способ, предложенный в [2], может быть реализован без каких-либо затруднений. В случае очень тонкой оболочки в виде сферического пояса применение метода может встретить трудности, связанные с неудовлетворительной сходимостью гипергеометрических рядов. В настоящей статье излагается решение уравнения (I), свободное от этого недостатка.

I. Первое частное решение y_{1n} уравнения (I), регулярное при $\psi = 0$, можно взять в форме, предложенной В.Г.Рекачом [3]. Оно получается следующим образом. Положим, что

$$y_{1n} = z_n \operatorname{tg}^n \frac{\psi}{2}.$$

Тогда для z_n получается уравнение

$$z_n'' + (\operatorname{ctg}\psi + \frac{2n}{\sin\psi}) z_n' + \nu(\nu+1) z_n = 0,$$

которое подстановкой

$$x = \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

приводится к следующему гипергеометрическому уравнению

$$x(1-x)\frac{d^2 z_n}{dx^2} + (n+1-2x)\frac{dz_n}{dx} + \nu(\nu+1) z_n = 0 \tag{3}$$

с параметрами [4]

$$\alpha = -\nu, \quad \beta = \nu + 1, \quad \gamma = n+1.$$

Согласно (2)

$$\nu = a - \frac{1}{2} + i b, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{25+16\lambda^2}+5}{2}}, \quad b = \frac{\lambda}{2a}$$

Уравнению (3) удовлетворяет гипергеометрический ряд [4]

$$z_n = F(-\nu, \nu+1, n+1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{k!(n+1)_k} x^k, \tag{4}$$

в котором

$$(\tau)_k = \tau(\tau+1)\dots(\tau+k-1), \quad (\tau)_0 = 1.$$

Следовательно, решение y_{1n} будет иметь вид [3]

$$y_{1n} = \operatorname{tg}^n \frac{\psi}{2} F(-\nu, \nu+1, n+1, \sin^2\frac{\psi}{2}). \tag{5}$$

2. Выражение (4) можно представить следующим образом:

$$F(-\nu, \nu+1, n+1, x) = \varphi_{1n}(x) + i\omega_{1n}(x). \tag{6}$$

Здесь

$$\varphi_{1n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kn} x^k, \quad \omega_{1n}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{kn} x^k, \tag{7}$$

причем

$$\alpha_{kn} = \frac{k(k-1)-1}{k(k+n)}\alpha_{k-1,n} + \frac{\lambda}{k(k+n)}\beta_{k-1,n}$$

$$\beta_{kn} = \frac{k(k-1)-1}{k(k+n)}\beta_{k-1,n} - \frac{\lambda}{k(k+n)}\alpha_{k-1,n}$$

$$\alpha_{on} = 1, \quad \beta_{on} = 0.$$

3. Функции $\varphi_{1n}(x)$ и $\omega_{1n}(x)$ целесообразно вычислять не непосредственно по формулам (7), а записав их в следующем виде:

$$\varphi_{1n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{kn}(x), \quad \omega_{1n}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{kn}(x), \tag{8}$$

где, очевидно,

$$\zeta_{kn} = x\left[\frac{k(k-1)-1}{k(k+n)}\zeta_{k-1,n} + \frac{\lambda}{k(k+n)}\eta_{k-1,n}\right]$$

$$\eta_{kn} = x\left[\frac{k(k-1)-1}{k(k+n)}\eta_{k-1,n} - \frac{\lambda}{k(k+n)}\zeta_{k-1,n}\right]$$

$$\zeta_{on} = 1, \quad \eta_{on} = 0.$$

4. На основании (5) и (6) запишем

$$y_{1n} = (\varphi_{1n} + i\omega_{1n})\, tg^n \frac{\psi}{2} = \sigma_{1n} + i\tau_{1n},$$

так, что

$$\sigma_{1n} = \varphi_{1n}\, tg^n \frac{\psi}{2}, \qquad \tau_{1n} = \omega_{1n}\, tg^n \frac{\psi}{2}.$$

6. Исходя из (4), можно установить зависимость $(n \geqslant 1)$

$$x\frac{dz_n}{dx} = n(z_{n-1} - z_n).$$

Она позволяет получить следующее выражение для производной y'_{1n} $(n \geqslant 1)$:

$$y'_{1n} = n(y_{1,n-1} - y_{1n}\, ctg\,\psi). \tag{9}$$

Отсюда:

$$\sigma'_{1n} = n(\sigma_{1,n-1} - \sigma_{1n}\, ctg\,\psi)$$

$$\tau'_{1n} = n(\tau_{1,n-1} - \tau_{1n}\, ctg\,\psi).$$

Интегрируя от 0 до ψ обе части уравнения (I) при $n = 0$, предварительно умножив его на $\sin\psi$, получим

$$y'_{10} + (1 + i\lambda) y_{11} = 0,$$

отсюда выводим для $n = 0$:

$$\sigma'_{10} = -\sigma_{11} + \lambda\tau_{11}, \quad \tau'_{10} = -\tau_{11} - \lambda\sigma_{11}.$$

5. Второе частное решение y_{2n} уравнения (I), регулярное при $\psi = \pi$, будем искать в виде произведения

$$y_{2n} = (-1)^n w_n \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2}. \qquad \text{(I0)}$$

Тогда для w_n получится уравнение

$$w''_n + \left(\operatorname{ctg}\psi - \frac{2n}{\sin\psi}\right) w'_n + \nu(\nu+1) w_n = 0.$$

Заменой

$$t = 1 - x = 1 - \sin^2\frac{\psi}{2} = \cos^2\frac{\psi}{2}$$

оно переходит в гипергеометрическое

$$t(1-t)\frac{d^2 w_n}{dt^2} + (n+1-2t)\frac{dw_n}{dt} + \nu(\nu+1) w_n = 0,$$

совпадающее с точностью до обозначений с (3).

Следовательно,

$$w_n = F(-\nu, \nu+1, n+1, t)$$

и, в соответствии с (I0),

$$y_{2n} = (-1)^n \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2} F(-\nu, \nu+1, n+1, t)$$

или

$$y_{2n} = (-1)^n \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2} F\left(-\nu, \nu+1, n+1, \cos^2\frac{\psi}{2}\right)$$

Записав

$$F(-\nu, \nu+1, n+1, t) = F(-\nu, \nu+1, n+1, 1-x) =$$

$$= \varphi_{2n}(x) + i\omega_{2n}(x),$$

где

$$\varphi_{2n}(x) = \varphi_{1n}(t) = \varphi_{1n}(1-x), \quad \omega_{2n}(x) = \omega_{1n}(t) = \omega_{1n}(1-x) \qquad \text{(II)}$$

представим решение y_{2n} в форме

$$y_{2n} = \sigma_{2n} + i\tau_{2n}. \qquad \text{(I2)}$$

Здесь

$$\sigma_{2n} = (-1)^n \varphi_{2n} \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2}, \qquad \tau_{2n} = (-1)^n \omega_{2n} \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2}$$

Для производной y'_{2n} легко получить формулу

$$y'_{2n} = n(y_{2,n-1} - y_{2n}\operatorname{ctg}\psi),$$

аналогичную (9).

Отсюда, согласно (I2),

$$\sigma'_{2n} = n(\sigma_{2,n-1} - \sigma_{2n}\operatorname{ctg}\psi)$$

$$\tau'_{2n} = n(\tau_{2,n-1} - \tau_{2n}\operatorname{ctg}\psi).$$

При $n = 0$, как и ранее, будем иметь

$$\sigma'_{20} = -\sigma_{21} + \lambda\tau_{21}, \quad \tau'_{20} = -\tau_{21} - \lambda\sigma_{21}.$$

6. Значения функций φ_{2n} и ω_{2n} в соответствии с (II) можно вычислять по формулам (8), изменив в них аргумент x на аргумент $t = 1 - x$.

7. Вронскиан системы решений y_{1n} , y_{2n} ($n \geqslant 1$) уравнения (I) будет иметь вид

$$W[y_{1n}, y_{2n}] = y_{1n}y'_{2n} - y'_{1n}y_{2n} =$$

$$= n(y_{1n}y_{2,n-1} - y_{2n}y_{1,n-1}) = \frac{2n(-1)^{n-1}F(-\nu, \nu+1, n+1, 1)}{\sin\psi}$$

Так как [3]

$$F(-\nu, \nu+1, n+1, 1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1+\nu)\Gamma(n-\nu)} = A_n + iB_n, \tag{I3}$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция, то

$$W[y_{1n}, y_{2n}] = \frac{2(n!)^2}{\Gamma(n+1+\nu)\Gamma(n-\nu)} \frac{(-1)^{n-1}}{\sin\psi}. \tag{I4}$$

Это соотношение справедливо и для $n = 0$:

$$W[y_{10}, y_{20}] = -\frac{2}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)} \frac{1}{\sin\psi} = -\frac{2(A+iB)}{\sin\psi}$$

Здесь

$$A = \frac{1}{\pi}\cos\pi a\operatorname{ch}\pi b, \qquad B = -\frac{1}{\pi}\sin\pi a\operatorname{sh}\pi b.$$

Из (I3) легко получить следующие формулы контроля правильности вычисления рядов φ_{1n} , ω_{1n} , φ_{2n} , ω_{2n} ($n \geqslant 1$):

$$(\varphi_{1n}\varphi_{2,n-1} - \omega_{1n}\omega_{2,n-1})\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sin\psi +$$

$$+ (\varphi_{2n}\varphi_{1,n-1} - \omega_{2n}\omega_{1,n-1})\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}\sin\psi = 2A_n,$$

$$(\varphi_{1n}\,\omega_{2,n-1}+\omega_{1n}\,\varphi_{2,n-1})\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}\sin\psi+$$

$$+(\varphi_{2n}\,\omega_{1,n-1}+\omega_{2n}\,\varphi_{1,n-1})\,\mathrm{ctg}\,\frac{\psi}{2}\sin\psi=2B_n.$$

Здесь, как следует из (I3), для $n=1$

$$A_1=-\frac{A+\lambda B}{1+\lambda^2},\qquad B_1=-\frac{B-\lambda A}{1+\lambda^2}$$

Для $n\geqslant 2$

$$A_n=\frac{n(n-1)}{(n^2-n-1)^2+\lambda^2}\left[(n^2-n-1)A_{n-1}-\lambda B_{n-1}\right]$$

$$B_n=\frac{n(n-1)}{(n^2-n-1)^2+\lambda^2}\left[(n^2-n-1)B_{n-1}+\lambda A_{n-1}\right].$$

8. Вычисления значений φ_{2n} и ω_{2n} по приведенным выше формулам показали, что в случае очень тонких оболочек ($\frac{R}{\delta}>400$) расчеты по ним следует проводить, начиная с какого-то значения n_0 , для которого степенные ряды сходятся сравнительно хорошо. Для значения $n<n_0$ лучше использовать следующие рекуррентные зависимости ($n\geqslant 0$):

$$\varphi_{2n}=\left(1-\mathrm{ctg}^2\frac{\psi}{2}\right)\varphi_{2,n+1}+$$

$$+\frac{(n^2+3n+1)\varphi_{2,n+2}+\lambda\omega_{2,n+2}}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{ctg}^2\frac{\psi}{2},$$

$$\omega_{2n}=\left(1-\mathrm{ctg}^2\frac{\psi}{2}\right)\omega_{2,n+1}+$$

$$+\frac{(n^2+3n+1)\omega_{2,n+2}-\lambda\varphi_{2,n+2}}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{ctg}^2\frac{\psi}{2},$$

вытекающие из соотношения [4]:

$$n(n+1)(1-2t)w_n+(n^2+n-1-i\lambda)\,t\,w_{n+1}-$$

$$-n(n+1)(1-t)w_{n-1}=0.$$

9. В заключение заметим, что функции σ_{1n} и τ_{1n} являются затухающими по мере приближения к полюсу $\psi=0$, а функции σ_{2n} и τ_{2n} - затухающими по мере удаления от полюса. Благодаря этому обстоятельству при расчете сферических поясов исключается возможность появления малых разностей близких чисел.

Л и т е р а т у р а

I. Гольденвейзер А.Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т.УШ, в.6, 1944.

2. Ахмедьянов И.С. Интегрирование основного дифференциального уравнения изгиба сферической оболочки при произвольном нагружении. "Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей". Труды КуАИ, вып.XIX, Куйбышев, 1965.

3. Рекач В.Г. Расчет тонких сферических оболочек. Сб."Расчет пластин и оболочек", Труды МИСИ им.В.В.Куйбышева , вып. 34, Москва, 1963.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., 1965.