

А. С. МОСТОВОЙ, Б. А. ЛАВРОВ

ОБ ОЦЕНКЕ УСТАЛОСТНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ ОБРАЗЦА ПО ИЗМЕНЕНИЮ ЕГО ЖЕСТКОСТИ

1. Постановка вопроса

Для оценки накопления повреждений в настоящее время употребляется априорная мера повреждения D , определяемая в зависимости от принятой гипотезы накопления повреждений. Об этой мере известно, что $D=0$ в самом начале работы (испытаний) конструкции и $D=1$ в момент ее разрушения. Во все другие моменты времени $0 < D < 1$. Опытная проверка функции повреждения практически невозможна из-за отсутствия конкретного содержания меры D . Естественно, возникает стремление конкретизировать эту меру, придать ей реальное содержание. В литературе упоминаются попытки принять в качестве меры повреждения величину усталостной трещины [4]. Мера эта не привилась из-за трудности оценки размера усталостной трещины в процессе накопления повреждений. Эта трудность, однако, может быть преодолена, если установить связь между размерами усталостной трещины и изменением надлежащим образом выбранного параметра системы «вибратор-образец».

В качестве такого параметра следует принять жесткость поврежденного образца, изменение которой в процессе испытаний можно оценить. Здесь жесткость поврежденного образца $c_{пр}$ понимается в интегральном смысле, как приведенная жесткость, т. е. как жесткость балки постоянного сечения, перемещения которой в точке приложения силы P равны перемещениям поврежденной балки в той же точке.

В настоящей работе в качестве меры повреждения принимается величина A , характеризующая относительный размер усталостной трещины:

$$A = 1 - \frac{h}{H} = 1 - \bar{h},$$

где $2h$ — высота неповрежденной части сечения образца,
 $2H$ — полная высота сечения.

Дальнейшее изложение ведется применительно к испытаниям

консольного образца на усталость при изгибе, однако оно не теряет общности и при других видах усталостных испытаний.

Испытания образцов на усталость при случайной и гармонической нагрузке проведены на электродинамическом вибраторе, который имеет неподвижный постоянный электромагнит и подвижную катушку, соединенную с корпусом при помощи упругой рессоры. Образец, имеющий до повреждения жесткость c и рессора с жесткостью c_p связаны подвижной катушкой так, что прогибы их по линии действия силы P одинаковы (фиг. 1).

Так как $c_p \gg c$, то вследствие развития усталостной трещины образца прогибы изменяются мало. Уменьшение жесткости образца при наличии повреждения обуславливает уменьшение отношения напряжения σ в некотором неповрежденном сечении его к напряжению σ_p в рессоре, замеренному в тот же момент времени. Это происходит из-за

уменьшения силы, действующей на образец в результате перераспределения силы P между образцом и рессорой. Поэтому целесообразно падение жесткости поврежденного образца связать с изменением напряжений в неповрежденном сечении образца, которые могут быть замерены в процессе эксперимента.

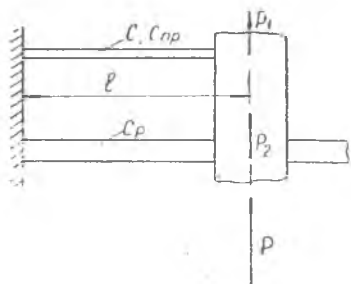
Настоящая работа посвящена решению этой задачи при действии на образец динамической нагрузки случайного характера. Указанную связь удобно установить без решения уравнений, описывающих поведение системы «вибратор-образец», с помощью методов, применяемых в теории автоматического регулирования.

С развитием трещины в процессе усталостных испытаний изменяется реакция системы на входной сигнал, которая, как известно, может быть оценена передаточной функцией или амплитудно-фазовой характеристикой системы.

Ниже будет показано, что передаточная функция системы, «вибратор-образец» зависит от жесткости $c_{пр}$ испытываемого образца в момент времени t и что относительное изменение жесткости $\frac{c_{пр}}{c}$ определяется относительным изменением замеряемых в образце и рессоре напряжений $\frac{(\sigma_p)t}{(\sigma_p)\sigma}$ (индекс «0» соответствует начальному моменту времени).

Относительное изменение жесткости, с другой стороны, может быть связано с относительным размером трещины $(1-h)$.

В конечном счете, замеряя напряжения в неповрежденном сечении образца и в рессоре, мы контролируем развитие усталостной трещины и накопление повреждений.



Фиг. 1.

На основе изложенных соображений, очевидно, представится возможным: 1) произвести опытную проверку различных теорий накопления повреждений в процессе развития трещины и 2) оценить влияние характеристик стационарного случайного процесса (математическое ожидание, дисперсия, спектральная плотность) на второй стадии накопления повреждений.

Можно указать также на возможность оценки повреждения конструкции на основе использования образцов-индикаторов («свидетелей» усталостного повреждения), установленных в окрестности наиболее нагруженных сечений различных элементов конструкции. Исследуя развитие трещины на образце-индикаторе, мы можем установить его повреждение, по которому можно оценить повреждение конструкции.

2. Передаточные функции звеньев системы «вибратор-образец»

Рассмотрим передаточную функцию $G(s)$ системы «вибратор-образец», приняв за входной сигнал величину электрического тока i в обмотке подвижной катушки вибратора, а за выходной сигнал — напряжение σ в некотором неповрежденном сечении образца. Полагаем, что все звенья системы линейны, т. е. описываются линейными дифференциальными (или алгебраическими) уравнениями. Учитывая, что передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев, напишем:

$$G(s) = \frac{L(\sigma)}{L(i)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s). \quad (1)$$

Здесь

$G_1(s) = \frac{L(P)}{L(i)}$ — передаточная функция от входного тока к силе P на выходе из вибратора;

$G_2(s) = \frac{L(P_1)}{L(P)}$ — передаточная функция от силы P на выходе из вибратора к силе P_1 , действующей на образец;

$G_3(s) = \frac{L(y)}{L(P_1)}$ — передаточная функция от силы P_1 , к прогибу y образца;

$G_4(s) = \frac{L(\sigma)}{L(y)}$ — передаточная функция от прогиба y к напряжению σ ;

L — оператор преобразования Лапласа:

$$L(x) = \int_0^{\infty} x e^{-st} dt.$$

Рассмотрим последовательно передаточные функции звеньев системы.

1) $G_1(s) = \frac{L(P)}{L(i)}$ есть передаточная функция вибратора, ко-

торая в первом приближении может рассматриваться независимой от времени и нагрузки. Для рассматриваемой задачи, как это видно будет дальше, нет необходимости в определении этой функции.

2) Так как зависимость между прогибом y и силой P_1 будет линейной, то, учитывая равенство прогибов образца и рессоры, получим распределение силы P между ними пропорционально их изгибным жесткостям. Тогда вместо передаточной функции

$$G_2(s) = \frac{L(P_1)}{L(P)} \text{ имеем передаточный коэффициент}$$

$$k_2 = \frac{P_1}{P} = \frac{c_{np}}{c_{np} + c_p}. \quad (2)$$

Здесь c_{np} — приведенная жесткость образца (определение этого понятия дано выше).

Изменение отношения $\frac{P_1}{P}$ во времени невелико и происходит, по мере изменения жесткости образца, весьма медленно по сравнению с изменением значений случайной или гармонической нагрузки. На этом основании можем на некотором отрезке времени рассматривать отношение $\frac{P_1}{P}$ постоянным.

3) $G_3(s) = \frac{L(\dot{y})}{L(P_1)}$ есть передаточная функция образца. Она может быть получена из дифференциального уравнения колебания образца, которое составим с учетом внутреннего трения, пользуясь законом Фохта [2]

$$\sigma = E\varepsilon + k_0 \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (3)$$

где k_0 — коэффициент вязкости материала.

При этом жесткость поврежденного образца считаем равной приведенной жесткости c_{np} .

Так как

$$\varepsilon = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} z = -\kappa z \quad (\text{см. фиг. 2}),$$

то

$$\sigma = -E\kappa z - k_0 \frac{\partial \kappa}{\partial t} z.$$

Отсюда

$$M = -\int_F \sigma z dF = c_{np} \kappa + k_0 \frac{c_{np}}{E} \frac{\partial \kappa}{\partial t}. \quad (4)$$

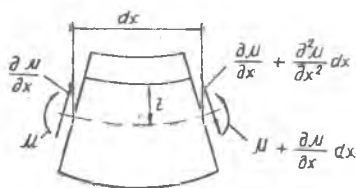
Напишем уравнение проекций на ось z .

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

где m , F — погонная масса образца и площадь сечения, соответствующая c_{np} .

Подставив (4) в последнее выражение и учтя, что $\kappa = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, получим уравнение свободных колебаний.

Вследствие развития трещины жесткость $c_{\text{нр}}$ изменяется с течением времени и уравнение свободных колебаний содержит переменные коэффициенты. Однако указанное изменение происходит несоизмеримо медленнее, чем изменение других параметров системы (скоростей, ускорений, величины внешней нагрузки).



Фиг. 2.

Это дает основание считать приведенную жесткость постоянной на отрезке времени, значительно превышающем период колебания, т. е. «заморозить» коэффициенты при переменной y .

Тогда уравнение свободных колебаний запишется в виде:

$$c_{\text{нр}} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + k_0 \frac{c_{\text{нр}}}{E} \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Так как передаточная функция не зависит от закона изменения возмущающей нагрузки, то приложим к балке возмущение вида $P_1 = P_0 \sin \omega t$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при этом будет иметь вид [2]:

$$\frac{c_{\text{нр}}}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{k_0 c_{\text{нр}}}{Em} \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q(x)}{m} \sin \omega t, \quad (6)$$

где

$$q(x) = \sum_{r=1}^{\infty} h_r X_r(x) \quad (7)$$

и

$$h_r = P_0 \frac{X_r(t)}{\int_0^1 X_r^2(x) dx} \quad (8)$$

Здесь $X_r(x)$ — функции формы колебаний
 $S_r(t)$ — функции времени.

В соответствии с (7) решение уравнения (6) ищем в виде ряда:

$$y = \sum_{r=1}^{\infty} X_r(x) S_r(t). \quad (9)$$

Подставим (7) и (9) в уравнение (6) и требуя, чтобы оно удовлетворялось для любого значения r , получим:

$$\begin{aligned} \frac{c_{\text{нр}}}{m} X_r^{IV}(x) S_r(t) + \frac{k_0 c_{\text{нр}}}{Em} X_r^{IV}(x) \dot{S}_r(t) + X_r(x) \ddot{S}_r(t) = \\ = \frac{h_r}{m} X_r(x) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Здесь цифрой IV обозначена четвертая производная по x , а точка — производные по t .

Разделим переменные:

$$-\frac{c_{np}}{m} \frac{X_r^{IV}(x)}{X_r(x)} = \frac{\ddot{S}_r(t) - \frac{h_r}{m} \sin \omega t}{S_r(t) + \frac{k_0}{E} \dot{S}_r(t)}$$

В результате приходим к системе из двух уравнений.

$$X_r^{IV}(x) - b_r^4 X_r(x) = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{S}_r(t) + p_r^2 \frac{k_0}{E} \dot{S}_r(t) + p_r^2 S_r(t) = \frac{h_r}{m} \sin \omega t, \quad (11)$$

где

$$b_r^4 = p_r^2 \frac{m}{c_{np}},$$

p_r есть собственная частота гармонических колебаний r -го тона.

Умножив обе части уравнения (11) на $X_r(x)$ и используя (8), получим

$$\ddot{y}_r + p_r^2 \frac{k_0}{E} \dot{y}_r + p_r^2 y_r = \frac{P_1 X_r(l) X_r(x)}{m \int_0^l X_r^2(x) dx} \quad (12)$$

Передающую функцию рассматриваемого звена найдем для r -го тона колебаний.

Произведем преобразование Лапласа обеих частей равенства (12). Учитывая, что преобразование постоянной есть сама постоянная и что преобразование дифференциального уравнения совпадает с символической записью его (при естественных начальных условиях), приходим к выражению

$$p_r^2 (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1) L(y_r) = \frac{L(P_1) X_r(l) X_r(x)}{m \int_0^l X_r^2(x) dx}, \quad (13)$$

откуда

$$G_{3r}(s) = \frac{L(y_r)}{L(P_1)} = \frac{\lambda(r, x) / p_r^2}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}. \quad (14)$$

Здесь

$$T_1^2 = \frac{1}{p_r^2}; \quad T_2 = \frac{k_0}{E}; \quad \lambda(r, x) = \frac{X_r(l) X_r(x)}{m \int_0^l X_r^2(x) dx}$$

Выражение (14) есть передающая функция колебательного звена.

4) $G_4(s)$ — передающую функцию от прогиба к напряжению — будем искать, также как предыдущую; для r -го тона колебаний. Полагаем, что изгибающий момент для поврежденного образца совпадает с изгибающим моментом балки с приведенной жесткостью

$c_{\text{нр}}$. Тогда напряжение в неповрежденном сечении можно записать в виде:

$$\sigma = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{c_{\text{нр}}}{c} EH = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bar{c}_{\text{нр}} EH,$$

где $2H$ — высота неповрежденного сечения образца; $\bar{c}_{\text{нр}} = \frac{c_{\text{нр}}}{c}$.

Учитывая выражение (9), получим:

$$\sigma = \bar{c}_{\text{нр}} EH \sum_{r=1}^{\infty} X_r''(x) S_r(t). \quad (15)$$

Для консольной балки, воспользовавшись функциями А. Н. Крылова, $X_r(x)$ запишем в виде:

$$X_r(x) = \frac{d}{2} [\text{ch } b_r x - \cos b_r x - B_r (\text{sh } b_r x - \sin b_r x)], \quad (16)$$

где [1]:

$$B_r = \frac{\text{ch } b_r l + \cos b_r l}{\text{sh } b_r l + \sin b_r l},$$

d — постоянная, определяемая из граничных условий.

Вторая производная:

$$X_r''(x) = b_r^2 [X_r(x) + d(\cos b_r x - B_r \sin b_r x)] = b_r^2 [X_r(x) + c_r]. \quad (17)$$

Здесь

$$c_r = d(\cos b_r x - B_r \sin b_r x).$$

Воспользовавшись (15) и (17), запишем напряжение σ_r , обусловленное прогибом y_r :

$$\sigma_r = \bar{c}_{\text{нр}} EH b_r^2 [X_r(x) + c_r] S_{r2}(t) = \bar{c}_{\text{нр}} EH b_r^2 y_r \left[1 + \frac{c_r}{X_r(x)} \right].$$

Отсюда получаем вместо передаточной функции передаточный коэффициент для r -го тона колебаний:

$$k_{4r} = \frac{\sigma_r}{Y_r} = \bar{c}_{\text{нр}} f(r, x), \quad (18)$$

где

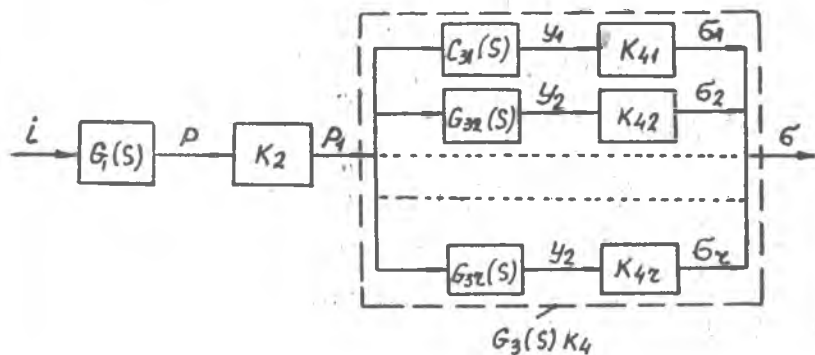
$$f(r, x) = \left(1 + \frac{c_r}{X_r(x)} \right) EH b_r^2.$$

3. Мера повреждения

Выше мы условились оценивать повреждение изменением реакции системы на входной сигнал. Напомним, что за входной сигнал принята величина электрического тока i , а за выходной — напряжение σ в неповрежденном сечении образца. Удобно в качестве оценки повреждения рассматривать отношение передаточных функций системы в момент времени t и в начальный момент времени.

Чтобы перейти к передаточной функции системы, рассмотрим ее структурную схему (фиг. 3).

Группу звеньев с передаточными функциями $G_{3r}(s)$ и передаточными коэффициентами K_{4r} объединим в одно звено с передаточной функцией $G_3(s)K_4$. Для рассматриваемых низкочастотных колебаний отношение квадратов частот вынужденных и собственных ко-



Фиг. 3.

лебаний $\frac{\omega_2}{p_r^2} = T_1^2 \omega^2$ по сравнению с единицей мало (порядка 0,01).

Учитывая это обстоятельство, на основании (14), (18) и помня, что $p_r^2 = c_{np} \frac{b_r^4}{m}$, можем написать.

$$G_{3r}(s)k_{4r} = \frac{\lambda(r, x) f(r, x) m}{(T_2 s + 1) c b_r^4} \quad (19)$$

Тогда

$$G_3(s)k_4 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(r, x) f(r, x) m}{(T_2 s + 1) c b_r^4} \quad (20)$$

Запишем отношение передаточных функций в момент времени t и в начальный момент времени:

$$\frac{[G(s)]_t}{[G(s)]_0} = \frac{[G_1(s)]_t}{[G_1(s)]_0} \cdot \frac{k_{2t}}{k_{20}} \cdot \frac{[G_3(s)k_4]_t}{[G_3(s)k_4]_0} \quad (21)$$

Из соображений, изложенных выше (см. стр. 83) следует, что

$$\frac{[G_1(s)]_t}{[G_1(s)]_0} = 1. \quad (22)$$

Так как в момент времени $t=0$ (повреждение отсутствует) $c_{np}^0 = c$, то на основании выражения (2)

$$\frac{k_{2t}}{k_{20}} = \frac{c_{np}}{c_{np} + c_p} \cdot \frac{c}{c + c_p} = c_{np}^0 \frac{1 + \frac{c}{c_p}}{1 + \frac{c_{np}}{c_p}} \quad (23)$$

Для сложного звена с передаточной функцией $G_3(s)k_4$, пользуясь выражением (20) и помня, что c есть первоначальная жесткость образца, получим

$$\frac{[G_3(s)k_4]_t}{[G_3(s)k_4]_0} = 1 \quad (24)$$

В итоге, используя (21), (22), (23), (24), имеем

$$\frac{[G(s)]_t}{[G(s)]_0} = c_{\text{пр}} \frac{1 + \frac{c}{c_p}}{1 + \frac{c_{\text{пр}}}{c_p}} \quad (25)$$

С другой стороны

$$\frac{[G(s)]_t}{[G(s)]_0} = \frac{[L(x_{\text{вых}})/L(x_{\text{вх}})]_t}{[L(x_{\text{вых}})/L(x_{\text{вх}})]_0}$$

Через $x_{\text{вых}}$ и $x_{\text{вх}}$ обозначены соответственно сигналы на выходе и на входе системы.

Рассматривая это отношение в моменты времени, для которых $(x_{\text{вх}})_t = (x_{\text{вх}})_0$, получим:

$$\frac{[G(s)]_t}{[G(s)]_0} = \frac{[L(x_{\text{вых}})]_t}{[L(x_{\text{вых}})]_0} \quad (26)$$

Сопоставляя (25) и (26), замечаем, что отношение изображений выходных сигналов не зависит от частоты и поэтому может быть представлено как отношение амплитуд выходных сигналов

$$\frac{(x_{\text{вых}})_t}{(x_{\text{вых}})_0} = \frac{\sigma_t}{\sigma_0}$$

Тогда

$$c_{\text{пр}} \frac{1 + \frac{c}{c_p}}{1 + \frac{c_{\text{пр}}}{c_p}} = \frac{\sigma_t}{\sigma_0} \quad (27)$$

При этом нужно иметь в виду, что напряжения σ_t и σ_0 различаются лишь вследствие повреждения образца.

Очевидно, что на основании (27) можно отношение напряжений в рессоре в моменты времени $t=0$ и t (при одинаковых входных сигналах) записать в виде

$$\frac{\sigma_{p0}}{\sigma_{p0}} = \frac{c_p}{c_{\text{пр}} + c_p} ; \frac{\sigma_p}{c + c_p} = \frac{1 + \frac{c}{c_p}}{1 + \frac{c_{\text{пр}}}{c_p}} \quad (28)$$

Тогда, учитывая (27) и (28), придем к заключению, что

$$\frac{(\sigma/\sigma_p)_t}{(\sigma/p)_t} = c_{\text{пр}} = \frac{I_{\text{пр}}}{I} \quad (29)$$

где I , $I_{пр}$ — соответственно момент инерции и приведенный момент инерции сечения образца.

Отношение $\left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)_0$ берется в начальный момент времени, отношение

$\left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)_t$ — в момент времени t .

При этом очевидно, что входной сигнал может быть произвольным, так как указанные отношения, в силу линейной зависимости между напряжением и силой, от входного сигнала не зависят. Таким образом, определяя по результатам замеров напряжения σ и σ_p в неповрежденном сечении образца и рессоре в разные моменты времени, на основании выражения (29) находим $\bar{I}_{пр}$. Зная количественную связь между величиной усталостной трещины и приведенной жесткостью образца,* находим отношение $\frac{H}{h}$. Далее определяем меру повреждения $A=1-\bar{h}$, характеризующую относительный размер трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расчеты на прочность в машиностроении, т. 3. — Под ред. С. Д. Пономарева. Машгиз, М., 1959.
2. Я. Г. Пановко — Внутреннее трение при колебаниях упругих систем, Физматгиз, М., 1960.
3. Основы автоматического регулирования — под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, М., 1954.
4. В. В. Болотин, — Статистические методы в строительной механике, Стройиздат, М., 1965.

* См. статью авторов «Влияние усталостной трещины на изгибную жесткость образца» в настоящем сборнике.