

О. А. Горячев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА В ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ

В настоящей работе предлагается алгоритм расчета, позволяющий получать оптимальное распределение материала в оболочке переменной толщины.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу отыскания оптимального распределения материала в тонкой упругой оболочке, нагруженной произвольным образом. При этом будем предполагать отсутствие в оболочке ненагруженных участков.

Под оптимальной оболочкой в настоящей задаче понимается оболочка, отвечающая условию прочности и обладающая минимальным весом. Форма и геометрические размеры (кроме толщины) оболочки полагаются заданными. Разыскивается оптимальное (в указанном выше смысле) распределение материала в виде некоторой зависимости толщины от координат точек срединной поверхности.

Запишем выражения для напряжений, действующих в оболочке [4]:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{h} + \frac{6M_1}{h^2} \bar{Z}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{h} + \frac{6M_2}{h^2} \bar{Z},$$

$$\tau_{12} = \frac{S}{h} + \frac{6M}{h^2} \bar{Z}, \quad \tau_{1Z} = \frac{3}{2} \frac{Q_1}{h} (1 - \bar{Z}^2), \quad \tau_{2Z} = \frac{3}{2} \frac{Q_2}{h} (1 - \bar{Z}^2),$$

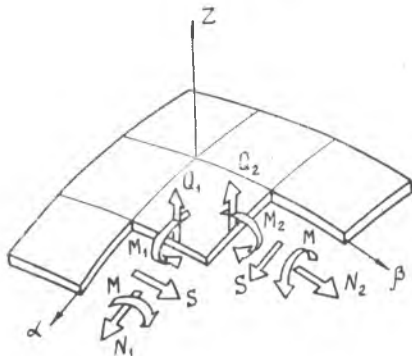
где $\bar{Z} = \frac{Z}{h/2}$; h — толщина оболочки; $N_1, N_2, S, M_1, M_2, M, Q_1, Q_2$ — силы и моменты, действующие в оболочке (фиг. 1).

Таким образом, в оболочке имеет место сложное напряженное состояние и для составления условия прочности необходимо вос-

пользоваться одной из теорий прочности. В настоящей задаче за основу принята энергетическая (четвертая) теория прочности, которая для пластических материалов (алюминиевые сплавы, стали) хорошо согласуется с опытными данными [1].

В соответствии с энергетической теорией условие прочности запишется в виде неравенства

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + 3\tau_{12}^2 + 3\tau_{1z}^2 + 3\tau_{2z}^2} \leq [\sigma], \quad (1)$$



Фиг. 1.

где $\sigma = \sigma(x, y, z, h)$ — приведенные напряжения;
 $[\sigma]$ — допускаемое напряжение

Для моментного напряженного состояния приведенные напряжения по толщине оболочки распределяются неравномерно. Поэтому в каждой точке срединной поверхности с координатами (x, y) из всех приведенных напряжений выделим наибольшее по толщине значение, которое обозначим через $\sigma^1 = \sigma^1(x, y, h)$. Тогда условие прочности примет вид:

$$\sigma'(x, y, h) \leq [\sigma]. \quad (2)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к отысканию экстремума (минимума) интеграла

$$G = \gamma \int_F h(x, y) dx dy \quad (3)$$

при соблюдении условия (2).

Здесь G — вес оболочки, γ — удельный вес материала, $h(x, y)$ — толщина оболочки, F — поверхность оболочки.

Для того, чтобы свести эту задачу к обычной задаче вариационного исчисления, преобразуем условие (2) к виду

$$\sigma'(x, y, h) = |\sigma| \psi(x, y), \quad (4)$$

введя некоторую функцию

$$\psi = \psi(x, y),$$

на которую наложено ограничение

$$0 \leq \psi \leq 1.$$

Такому ограничению отвечает, например, функция

$$\psi = \cos^2 \varphi,$$

где $\varphi = \varphi(x, y)$ — некоторая непрерывная функция от координат. Тогда условие прочности (4) можно переписать так:

$$f = \sigma'(x, y, h) - [\sigma] \cos^2 [\varphi(x, y)] = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) можно определить толщину оболочки h :

$$h = h(x, y, \varphi).$$

Таким образом, решение задачи будет заключаться в отыскании безусловного экстремума функционала

$$G = \iint_{\mathbb{E}} h(x, y, \varphi) dx dy. \quad (6)$$

Значения функции $\varphi = \varphi(x, y)$, при которых функционал (6) приобретает экстремальное (минимальное) значение, определяются из уравнения Остроградского [5]:

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0.$$

Пользуясь правилом дифференцирования неявно заданных функций [5], получим

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{\frac{\partial f}{\partial h}} = - \frac{2 [\sigma] \cos \varphi \sin \varphi}{\frac{\partial \sigma'}{\partial h}} = 0. \quad (7)$$

Так как функция $\sigma' = \sigma'(x, y, h)$ — однозначная, непрерывная и $\frac{\partial \sigma'}{\partial h} \neq 0$, то решением уравнения (7) будут значения $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \dots, n \frac{\pi}{2}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Откуда $\psi = 1, 0, 1, 0, \dots$

Однако $\psi = 0$ соответствует случаю $\sigma^1 = 0$. Равенство нулю напряжений при условии, что толщина в любом месте оболочки отлична от нуля, возможно только при наличии в оболочке ненагруженных участков, а такие случаи, как указывалось выше, нами из рассмотрения исключаются. Поэтому для ψ следует оставить только одно значение $\psi = 1$.

Таким образом, при

$$\psi(x, y) \equiv 1$$

функционал (6) приобретает экстремальное (минимальное) значение, а уравнение (5) принимает вид:

$$\sigma'(x, y, h) - [\sigma] = 0.$$

Теперь под оптимальной оболочкой можно понимать оболочку равных наибольших напряжений.

Наибольшие приведенные напряжения

Найдем значение относительной координаты \bar{z} , при котором приведенные напряжения достигают максимума.

Подставим в (1) вместо напряжений их выражения через силы и моменты. После некоторых преобразований получим

$$\sigma' = \sqrt{\frac{A}{h^2} + \frac{27}{4} \frac{D}{h^2} (1 - \bar{z}^2)^2 + \frac{6C}{h^3} \bar{z} + \frac{36B}{h^4} \bar{z}^2}, \quad (1)$$

где

$$A = N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2 + 3S^2, \quad B = M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 + 3M^2, \quad (1)$$

$$C = 2N_1 M_1 + 2N_2 M_2 - N_1 M_2 - N_2 M_1 + 6SM, \quad D = Q_1^2 + Q_2^2.$$

Значения A , B и D всегда положительны, а \bar{z} и C могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Очевидно, что σ достигает больших значений, когда \bar{z} и C одного знака. В дальнейшем для определенности оставим \bar{z} и C только положительные значения.

Исследуем подкоренное выражение равенства (9) как функцию от \bar{z} . Величина \bar{z} , при которой подкоренное выражение принимает максимальное значение, определится из уравнения

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \bar{z}} = \bar{z}^3 + 3p\bar{z} + 2q = 0, \quad (1)$$

где

$$p = \frac{8}{9} \frac{B}{h^2 D} - \frac{1}{3}, \quad q = \frac{C}{9h^2 D}.$$

При этом должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 \sigma^2}{\partial \bar{z}^2} = 3(\bar{z}^2 + p) < 0. \quad (1)$$

Из выражения (12) следуют условия

$$p < 0, \quad (1)$$

$$|\bar{z}| < \sqrt{|p|}. \quad (1)$$

При $p < 0$ уравнение (11) в зависимости от знака дискриминанта $d = q^2 + p^3$ может иметь следующие корни [2]:

$d \leq 0$	$d > 0$
$\bar{z}_1 = -2\sqrt{ p } \cos \frac{\varphi}{3}$	$\bar{z}_1 = -2\sqrt{ p } \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3}$
$\bar{z}_2 = +2\sqrt{ p } \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} \right)$	$\bar{z}_2 = +\sqrt{ p } \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}\sqrt{ p } \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3}$
$\bar{z}_3 = +2\sqrt{ p } \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3} \right)$	$\bar{z}_3 = +\sqrt{ p } \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}\sqrt{ p } \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3}$
$\cos \varphi = \frac{q}{ \sqrt{ p } ^3}$	$\operatorname{ch} \varphi = \frac{q}{ \sqrt{ p } ^3}$

Рассмотрим группу корней для $d > 0$. Корень \bar{z}_1 не удовлетворяет условию (14), так как $\operatorname{ch} \frac{\varphi}{3} > 1$, а корни \bar{z}_2 и \bar{z}_3 — комплексные. Таким образом, эта группа корней отпадает.

При $d \leq 0$ корень \bar{z}_2 не удовлетворяет условию (14), так как $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right) > \frac{1}{2}$, а сами корни по величине располагаются в следующем порядке:

$$\bar{z}_1 < \bar{z}_3 < \bar{z}_2.$$

Функция $\sigma^1 = \sigma^1(\bar{z})$ — непрерывная, поэтому максимум и минимум этой функции должны чередоваться, следовательно, возможны такие комбинации:

$$\max, \min, \max \text{ или } \min, \max, \min$$

Так как корень \bar{z}_2 заведомо не дает максимума функции, то остается возможной лишь вторая комбинация экстремальных значений, откуда следует, что только корень \bar{z}_3 удовлетворяет всем условиям максимума и, следовательно, при

$$\bar{z} = \bar{z}_3 = 2\sqrt{|p|} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) \quad (15)$$

выражение (9) приобретает максимальное значение.

Приведенные напряжения могут достигать наибольших значений внутри отрезка $\left[-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right]$ при $\bar{z} = \bar{z}_3$ или на границе этого отрезка при $\bar{z} = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma' &= (\sigma)_{\bar{z}=1}, \text{ если } (\sigma)_{\bar{z}=1} > (\sigma)_{\bar{z}=\bar{z}_3}, \\ \sigma' &= (\sigma)_{\bar{z}=\bar{z}_3}, \text{ если } (\sigma)_{\bar{z}=\bar{z}_3} > (\sigma)_{\bar{z}=1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Все вышеизложенные рассуждения сделаны в предположении, что $D \neq 0$. Для случая $D = 0$ приведенные напряжения достигают наибольших значений при $\bar{z} = 1$.

Алгоритм расчета оптимального распределения материала в оболочке

Получение аналитического решения задачи из уравнения (8) в виде функции $h = h(x, y)$ связано со значительными трудностями, так как предварительно необходимо решить систему дифференциальных уравнений изгиба оболочки переменной толщины и затем выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f_1[x, y, h(x, y)], \\ \sigma_2 &= f_2[x, y, h(x, y)], \\ &\dots \end{aligned}$$

подставить в уравнение (8). Обойти эти трудности можно с помощью численных методов, отыскивая оптимальное распределение материала в оболочке по предлагаемому ниже алгоритму, представляющему собой итерационный процесс, с помощью которого искомое решение можно получить с заданной точностью.

Расчет оптимального распределения материала в оболочке будем вести в такой последовательности:

1. Задаемся некоторым исходным распределением материала, например, $h_0 = \text{const}$.

2. Для заданного распределения материала с помощью численных методов, например, метода сеток, вычисляем силы и моменты $N_1, N_2, M_1, M_2, S, M, Q_1, Q_2$ действующие в оболочке.

3. По формулам (10) находим величины A, B, C, D и в соответствии с (16) определяем значения координаты \bar{z} , при которых σ достигает наибольших значений.

4. Решая для каждого узла сетки уравнение

$$[\sigma]^2 h^4 - \left[A + \frac{27}{4} D (1 - \bar{z}^2)^2 \right] h^2 - 6C\bar{z}h - 36B\bar{z}^2 = 0, \quad (17)$$

находим новое распределение материала.

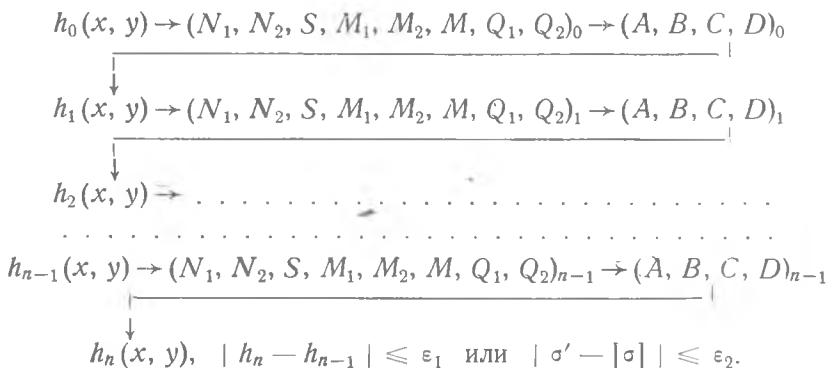
Заметим, что уравнение (17), представляющее собой преобразованное условие прочности (8), в интересующем нас интервале $(0, +\infty)$, в соответствии с теоремой Декарта [3] о числе переменных знаков коэффициентов уравнения, имеет один действительный корень.

Полученному распределению материала должны соответствовать новые значения сил и моментов. Поэтому, приняв полученное распределение материала за исходное, проводим новый цикл вычислений.

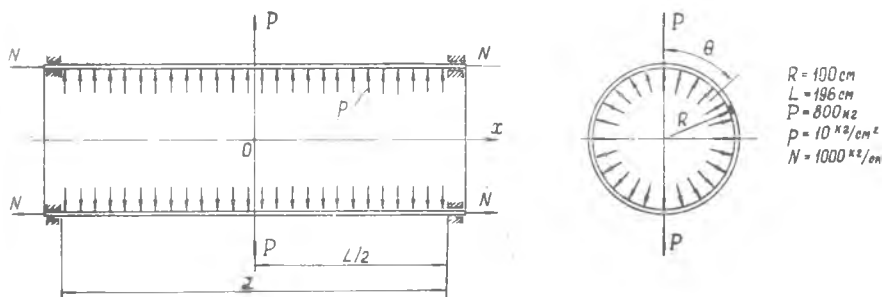
Расчет ведется до тех пор, пока абсолютная разность между предыдущим и последующим приближениями не будет меньше некоторого заданного значения:

$$|h_n - h_{n-1}| \leq \varepsilon_1 \quad \text{или} \quad |\sigma' - [\sigma]| \leq \varepsilon_2.$$

Алгоритм расчета оптимального распределения материала в оболочке можно представить следующей схемой:



Указанный алгоритм был применен к расчету круговых цилиндрических оболочек. Расчет проводился методом сеток, с помощью которого система дифференциальных уравнений цилиндрической оболочки переменной толщины в перемещениях заменяется систе-



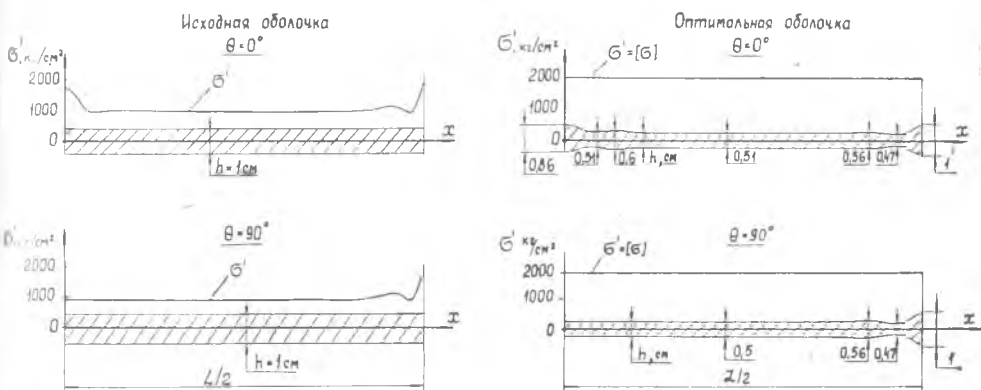
Фиг. 2.

мой линейных алгебраических уравнений, из решения которой определяются компоненты перемещений срединной поверхности оболочки.

По найденным перемещениям вычислялись значения сил и моментов, действующих в оболочке. Все вычисления производились на электронной цифровой машине М-20.

В среднем за 9—12 шагов алгоритма достигалось выполнение условий $|h_n - h_{n-1}| \leq 0,001 h_n$, $|\sigma' - [\sigma]| \leq 0,001 [\sigma]$.

В качестве иллюстрации предлагаемого метода ниже приводятся результаты расчета цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, двумя сосредоточенными силами и растягивающей нагрузкой, распределенной по защемленному краю оболочки (фиг. 2). Материал оболочки — алюминиевый сплав (модуль упругости $E = 7,5 \cdot 10^5$ кг/см², допускаемое напряжение $[\sigma] = 2000$ кг/см²). За исходную оболочку принималась оболочка постоянной толщины ($h_0 = 1$ см), в которой приведенные напряжения, действующие в наиболее нагруженном месте, равны допускаемым.



Фиг. 3.

В результате проведенного расчета материал оболочки перераспределился, наибольшие приведенные напряжения выровнялись и стали равны допускаемым. Вес оболочки по сравнению с исходным уменьшился на 44%.

На фиг. 3 изображены эпюры толщин и приведенных напряжений для исходной оболочки и оболочки переменной толщины, полученной в результате расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Беляев. Сопrotивление материалов. ГИТТЛ, М., 1958.
2. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. Справочник по математике. Изд. «Наука», М., 1964.
3. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Физматгиз, М., 1962.
4. Э. Рейснер. Некоторые проблемы теории оболочек. Сб. «Механика». Упругие оболочки. ИЛ, М., 1962.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Тт. I и IV, ГИТТЛ, М., 1956.