КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

Ю. Л. ТАРАСОВ

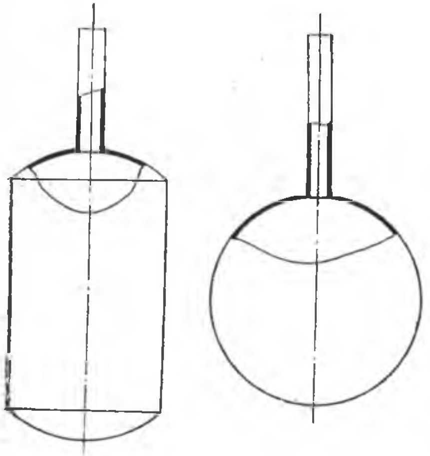
ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СОЧЛЕНЕНИИ ТРУБОПРОВОДА СО СФЕРИЧЕСКИМ ДНИЩЕМ БАКА

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

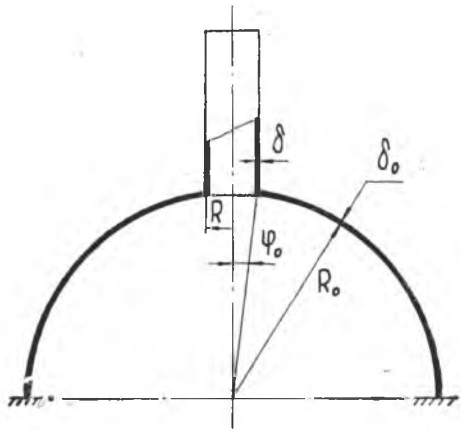
w — радиальные перемещения цилиндрической оболочки (трубки);
R — радиус срединной поверхности трубки и отверстия в вершине сферической оболочки;
R_0 — радиус срединной поверхности сферической оболочки;
δ, δ_0 — толщина трубки, сферической оболочки;
$\xi = \frac{x}{R}$ — координата, определяющая положение точек срединной поверхности трубки на ее образующей;
Δ — приращение радиуса параллельного круга сферической оболочки;
l — длина трубки;
D, D_0 — изгибная жесткость цилиндрической оболочки (трубки), сферической оболочки;
p, P — внешняя нагрузка;
M_ξ, M_φ — изгибающий момент в поперечном сечении цилиндрической оболочки (трубки), в нормальном сечении сферической оболочки;
Q_ξ, Q_φ — перерезывающая сила в поперечном сечении цилиндрической оболочки, в нормальном сечении сферической оболочки;
N_ξ, N_φ — нормальные усилия в поперечном сечении цилиндрической оболочки, в нормальном сечении сферической оболочки;
μ, E, E_0 — коэффициент Пуассона, модуль упругости материала трубки, материала сферической оболочки.

В авиационных конструкциях, а также в химических машинах и аппаратах имеются узлы, представляющие собой сочленение трубопроводов со сферическими днищами баков или емкостей (фиг. 1). При работе таких конструкций в зоне сочленения возникают большие изгибные напряжения. А так как эти конструкции и аппараты часто работают в условиях вибраций, то высокий уровень напряжений может привести к усталостному разрушению.

Расчетную схему таких узлов можно представить в виде сферической оболочки, к которой приварена цилиндрическая оболочка-трубка (фиг. 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В настоящей статье исследуются напряжения, возникающие в зоне сочленения трубки со сферической оболочкой. Трубка по свободному торцу нагружается равномерно распределенными силами вдоль образующих и силами, перпендикулярными оси трубки. Такие нагрузки будут возникать при вибрациях конструкций. Рассмотрен также случай, когда конструкция работает и при наличии внутреннего избыточного давления.

Некоторые задачи подобного рода освещены в литературе. Так, в работе [7] дан расчет сферического сосуда давления с отверстием в вершине, к которому присоединена цилиндрическая трубка. При решении задачи о сосредоточенных воздействиях на сферическую оболочку в работе [5] в качестве примера рассмотрена полусфера с присоединенной упругой трубкой, к которой приложен момент. Записаны граничные условия для определения постоянных интегрирования и приведены результаты решения для одного частного случая. Статья [6] посвящена численному анализу местных напряжений в сферической оболочке от радиальных и моментных нагрузок, передаваемых через жесткий цилиндр.

В статье [9] дано теоретическое исследование напряженного состояния сферической оболочки, обусловленного внешними силами и моментами, которые воздействуют на оболочку через упругий нерадиальный цилиндрический патрубок.

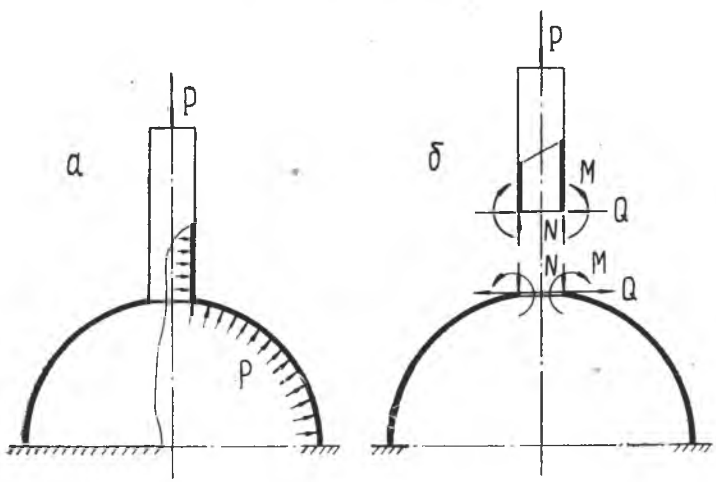
В работе [8] представлены экспериментальные и теоретические результаты в виде графиков напряжений для шести различных сферических оболочек с радиально прикрепленными патрубками. В некоторых образцах патрубок проходил через стенку оболочки.

Результаты экспериментальных исследований сосудов давления в виде сферических оболочек, к которым были приварены трубки, приведены в трудах симпозиума [10], состоявшегося в Глазго в мае 1960 г.

Несмотря на важность указанной проблемы, до настоящего времени нет методики расчета напряжений в сочленениях трубопроводов или патрубков с тонкостенными сферическими элементами, доведенной до вида, удобного в инженерных расчетах. Отсутствуют также обоснованные рекомендации по рациональному конструктивному оформлению сочленений.

Рассмотрим вначале случай, когда система подвергается действию силы P (фиг. 3а). При решении задачи воспользуемся методом сил. С этой целью сферическую оболочку мысленно отсечем от цилиндрического патрубка. Взаимодействие оболочек заменим усилиями M, N и Q (фиг. 3б). Усилия N найдем из условия равновесия

$$N = \frac{P}{2\pi R}, \tag{1}$$



Фиг. 3.

для определения же M и Q имеем два канонических уравнения, представляющих собой условия совместности деформаций сферической оболочки и патрубка в месте их сочленения:

$$\begin{aligned} \Delta_{MO} + \delta_{MM} M + \delta_{MQ} Q = 0, \\ \Delta_{QO} + \delta_{QM} M + \delta_{QQ} Q = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В этих уравнениях

$$\begin{aligned} \Delta_{MO} &= -\vartheta_0(\varphi_0), \\ \delta_{MM} &= -\frac{1}{R}\left[\frac{d\bar{w}_M}{d\xi}\right]_{\xi=0} - \bar{\vartheta}_M(\varphi_0), \\ \delta_{MQ} = \delta_{QM} &= -\frac{1}{R}\left[\frac{d\bar{w}_Q}{d\xi}\right]_{\xi=0} - \bar{\vartheta}_Q(\varphi_0), \\ \Delta_{QO} &= -w_0 + \Delta_0(\varphi_0), \\ \delta_{QQ} &= -\bar{w}_Q(0) + \bar{\Delta}_Q(\varphi_0). \end{aligned} \tag{3}$$

ϑ — угол поворота нормали к срединной поверхности сферической оболочки.

Для вычисления коэффициентов воспользуемся решениями уравнений осесимметричного изгиба сферических и цилиндрических оболочек [5], [1].

Следуя работе [5], запишем выражение перерезывающей силы в сферической оболочке в виде:

$$Q_\varphi = \frac{E_0}{(1-\mu^2)\frac{R_0}{\delta_0}}[A_1V_1 + A_2V_2 + A_3V_3 + A_4V_4]. \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}\, ker'z, \\ V_2 &= \sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}\, kei'z, \\ V_3 &= \sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}\, ber'z, \\ V_4 &= \sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}\, bei'z, \end{aligned}$$

$$z = \sqrt{2}\varkappa_0\varphi, \quad \varkappa_0 = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)\left(\frac{R_0}{\delta_0}\right)^2 - \frac{1}{4}\mu^2},$$

$$ker'z = \frac{d}{dz} ker\, z \tag{5}$$

и так далее.

A_i — постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий.

Удержим в решениях уравнений изгиба сферических оболочек только убывающие функции и введем обозначения:

$$a_1 = \frac{1}{(1-\mu^2)\frac{R_0}{\delta_0}} V_1,$$

$$a_2 = \frac{1}{(1-\mu^2)\frac{R_0}{\delta_0}} V_2,$$

$$b_1 = \varkappa_0^2 \frac{1}{6(1-\mu^2)^2\left(\frac{R_0}{\delta_0}\right)^2}\left[\dot{V}_2 + \mu V_2 \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\mu}{2\varkappa_0^2}(\dot{V}_1 + \mu V_1 \operatorname{ctg}\varphi)\right],$$

$$b_2 = -\varkappa_0^2 \frac{1}{6(1-\mu^2)^2\left(\frac{R_0}{\delta_0}\right)^2}\left[\dot{V}_1 + \mu V_1 \operatorname{ctg}\varphi + \frac{\mu}{2\varkappa_0^2}(\dot{V}_2 + \mu V_2 \operatorname{ctg}\varphi)\right],$$

$$g_1 = \frac{2\varkappa_0^2}{(1-\mu^2)\frac{R_0}{\delta_0}}\left(V_2 - \frac{\mu}{2\varkappa_0^2} V_1\right),$$

$$g_2 = -\frac{2\varkappa_0^2}{(1-\mu^2)\frac{R_0}{\delta_0}}\left(V_1 + \frac{\mu}{2\varkappa_0^2} V_2\right),$$

$$c_1 = \frac{\sin\varphi}{1-\mu^2}(\mu V_1 \operatorname{ctg}\varphi - \dot{V}_1),$$

$$c_2 = \frac{\sin\varphi}{1-\mu^2}(\mu V_2 \operatorname{ctg}\varphi - \dot{V}_2), \tag{6}$$

где

$$\dot{V}_1 = -\sqrt{2}\varkappa_0 \sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}\left[kei\, z + \frac{1}{2\sqrt{2}\varkappa_0}\left(\frac{1}{\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right) ker' z\right],$$

$$\dot{V}_2 = \sqrt{2}\varkappa_0 \sqrt{\frac{\varphi}{\sin\varphi}}\left[ker\, z - \frac{1}{2\sqrt{2}\varkappa_0}\left(\frac{1}{\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right) kei' z\right]. \tag{7}$$

Запишем теперь выражения для усилий и перемещений:

$$Q_\varphi = E_0[a_1(\varphi)A_1 + a_2(\varphi)A_2], \tag{а}$$

$$M_\varphi = E_0\delta_0[b_1(\varphi)A_1 + b_2(\varphi)A_2], \tag{б}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\delta_0}[g_1(\varphi)A_1 + g_2(\varphi)A_2], \tag{в}$$

(8)

$$\Delta = c_1(\varphi)A_1 + c_2(\varphi)A_2 + \frac{1+\mu}{2\pi E_0 \delta_0 \sin\varphi} P, \tag{г}$$

$$N_\varphi = -\frac{E_0 \delta_0}{(1-\mu^2)R_0} \operatorname{ctg}\varphi (V_1 A_1 + V_2 A_2) - \frac{P}{2\pi R_0 \sin^2\varphi}, \tag{д}$$

$$N_\theta = -\frac{E_0\delta_0}{(1-\mu^2)R_0}(\dot{V}_1 A_1 + \dot{V}_2 A_2) + \frac{P}{2\pi R_0 \sin^2\varphi}. \tag{е}$$

Рассмотрим теперь решение уравнения осесимметричного изгиба цилиндрических оболочек. Полагая трубку длиной ($l \geqslant 2{,}5\sqrt{R\delta}$ [3]) и отбрасывая в решении возрастающие функции, будем иметь:

$$w = e^{-\varkappa\xi}(B_1 \cos\varkappa\xi + B_2 \sin\varkappa\xi) + \frac{\mu P}{2\pi E\delta} + \frac{pR^2}{E\delta}, \tag{9}$$

$$\frac{dw}{d\xi} = -\varkappa e^{-\varkappa\xi}[B_1 \cos\varkappa\xi + \sin\varkappa\xi) + B_2(\sin\varkappa\xi - \cos\varkappa\xi)]. \tag{10}$$

Для определения усилий имеем формулы:

$$M_\xi = -\frac{2\varkappa^2 D}{R^2}(B_1 \sin\varkappa\xi - B_2 \cos\varkappa\xi)e^{-\varkappa\xi},$$

$$Q_\xi = -\frac{2\varkappa^3 D}{R^3}[B_1(\cos\varkappa\xi - \sin\varkappa\xi) + B_2(\cos\varkappa\xi + \sin\varkappa\xi)]e^{-\varkappa\xi} \tag{11}$$

Здесь

$$\varkappa = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)\left(\frac{R}{\delta}\right)^2}.$$

Найдем теперь все величины, определяющие коэффициенты (3). С этой целью рассмотрим сферическую оболочку, нагружение которой показано на фиг. 3б. Граничные условия здесь имеют вид:

$$\text{при } \varphi = \varphi_0 \qquad \begin{aligned} Q_\varphi(\varphi_0) &= Q\sin\varphi_0 - N\cos\varphi_0, \\ M_\varphi(\varphi_0) &= M. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя формулы (8а) и (8б), найдем значения постоянных

$$A_1 = \frac{\frac{1}{E_0}(Q\sin\varphi_0 - N\cos\varphi_0)\,b_2(\varphi_0) - \frac{1}{E_0\delta_0}Ma_2(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\,b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\,b_1(\varphi_0)},$$

$$A_2 = \frac{\frac{1}{E_0\delta_0}a_1(\varphi_0)M - \frac{1}{E_0}(Q_1\sin\varphi_0 - N\cos\varphi_0)\,b_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\,b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\,b_1(\varphi_0)}. \tag{13}$$

Для сферической оболочки, находящейся под воздействием внешних сил (основная система, фиг. 4а), в формулах (13) необходимо положить

$$N = \frac{P}{2\pi R_0 \sin\varphi_0}, \quad M = Q = 0.$$

После определения постоянных A_1^0, A_2^0 при помощи (8в, г) получим

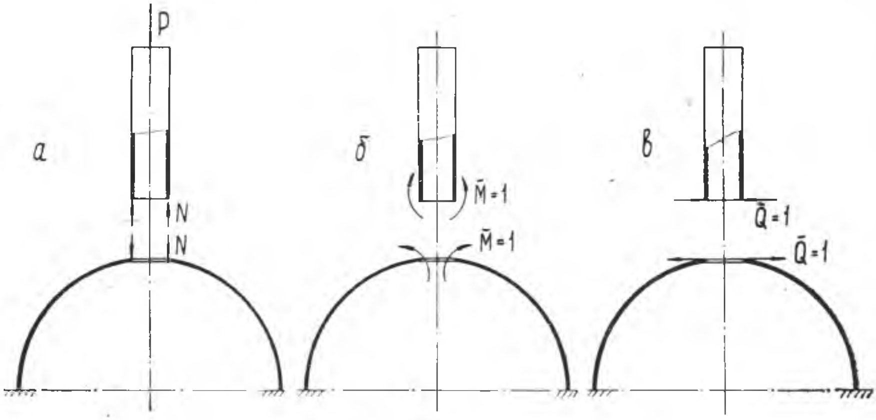
$$\vartheta_0(\varphi_0) = \frac{P}{E_0\delta_0^2}\,\alpha_0(\varphi_0, R_0/\delta_0), \tag{14}$$

$$\Delta_0(\varphi_0) = \frac{P}{E_0\delta_0}\,\beta_0(\varphi_0, R_0/\delta_0). \tag{15}$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_0 = \frac{\delta_0}{2\pi R_0 \operatorname{tg}\varphi_0} \frac{b_1(\varphi_0)\, g_2(\varphi_0) - b_2(\varphi_0)\, g_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}, \tag{16}$$

$$\beta_0 = \frac{\delta_0}{2\pi R_0 \operatorname{tg}\varphi_0} \frac{b_1(\varphi_0)\, c_2(\varphi_0) - b_2(\varphi_0)\, c_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}. \tag{17}$$



Фиг. 4.

Аналогично, рассмотрев сферическую оболочку (4б и в) под воздействием краевых сил $M = \overline{M} = 1$ (в этом случае в формулах (13) нужно положить $Q = N = 0$) и $Q = \overline{Q} = 1$ ($N = M = 0$), получим

$$\overline{\vartheta}_{\text{м}}(\varphi_0) = -\frac{1}{E_0 \delta_0^2}\, \alpha_1(\varphi_0,\ R_0/\delta_0), \tag{18}$$

$$\overline{\Delta}_{\text{м}}(\varphi_0) = \frac{1}{E_0\, \delta_0}\, \beta_1(\varphi_0,\ R_0/\delta_0), \tag{19}$$

$$\overline{\vartheta}_Q(\varphi_0) = -\frac{1}{E_0\, \delta_0}\, \alpha_2(\varphi_0,\ R_0/\delta_0), \tag{20}$$

$$\overline{\Delta}_Q(\varphi_0) = \frac{1}{E_0}\, \beta_2(\varphi_0,\ R_0/\delta_0), \tag{21}$$

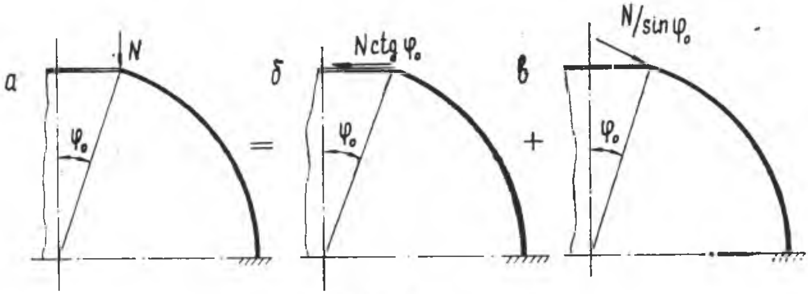
где

$$\alpha_1 = \frac{g_1(\varphi_0)\, a_2(\varphi_0) - g_2(\varphi_0)\, a_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}, \quad \beta_1 = \frac{a_1(\varphi_0)\, c_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, c_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}, \tag{22}$$

$$\alpha_2 = \sin\varphi_0 \frac{b_1(\varphi_0)\, g_2(\varphi_0) - b_2(\varphi_0)\, g_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}, \quad \beta_2 = \sin\varphi_0 \frac{c_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - c_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}{a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)}. \tag{23}$$

Заметим, что $\beta_1 = \alpha_2$, а α_0 и β_0 связаны соответственно с α_2 и β_2. В самом деле, вертикальную погонную нагрузку N_1 действующую на сферическую оболочку (фиг 4а), можно представить как результирующую двух других нагрузок (фиг. 5).

Одна из них $N \operatorname{ctg} \varphi_0$ (фиг. 5б) параллельна силам Q. Силы же $N/\sin\varphi_0$ (фиг. 5в) действуют по касательной к меридиану при $\varphi = \varphi_0$. При действии этих сил состояние оболочки будет безмоментным и, следовательно,



Фиг. 5.

$$N_\varphi = -N_\Theta = -\frac{N\sin\varphi_0}{\sin^2\varphi},$$

$$\Delta = \frac{1+\mu}{E_0\delta_0}\,\frac{NR_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi}, \quad \vartheta = 0. \tag{24}$$

При $\varphi = \varphi_0 \quad \Delta(\varphi_0) = \dfrac{1+\mu}{E_0\delta_0} NR_0.$

Таким образом можно записать, что

$$\vartheta_0(\varphi_0) = -\bar{\vartheta}_Q(\varphi_0) N\operatorname{ctg}\varphi_0 = \frac{P}{E_0\delta_0^2}\,\frac{\operatorname{ctg}\varphi_0}{2\pi\dfrac{R_0}{\delta_0}\sin\varphi_0}\,\alpha_2, \tag{25}$$

$$\Delta_0(\varphi_0) = -\bar{\Delta}_Q(\varphi_0) N\operatorname{ctg}\varphi_0 + \frac{1+\mu}{E_0\delta_0} NR_0 =$$
$$= \frac{P}{E_0\delta_0}\left(\frac{\beta_2\operatorname{ctg}\varphi_0}{2\pi R_0/\delta_0\sin\varphi_0} - \frac{1+\mu}{2\pi\sin\varphi_0}\right). \tag{26}$$

Сравнивая равенства (14) и (25), (15) и (26), установим, что

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_2\cdot\operatorname{ctg}\varphi_0}{2\pi\dfrac{R_0}{\delta_0}\sin\varphi_0}, \tag{27}$$

$$\beta_0 = \frac{\beta_2\operatorname{ctg}\varphi_0}{2\pi\dfrac{R_0}{\delta_0}\sin\varphi_0} - \frac{1+\mu}{2\pi\sin\varphi_0}. \tag{28}$$

Определим остальные величины, входящие в коэффициенты (3) и обусловленные деформацией цилиндрической оболочки (трубки). Трубка под действием внешней нагрузки (основная система) будет находиться в безмоментном напряженном состоянии (фиг. 4 а). Для нее:

$$w_0 = \text{const} = \frac{\mu P}{2\pi E\delta} \ . \tag{29}$$

Рассмотрев трубку в отдельности под действием сил $\overline{M} = 1$ и $\overline{Q} = 1$ (фиг. 4 б, в), найдем

$$\overline{w}_{\text{м}}(0) = \frac{1}{R}\left[\frac{d\overline{w}_Q}{d\xi}\right]_{\xi=0} = \frac{1}{E\delta}\,\omega_1\left(\frac{R}{\delta}\right), \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d\overline{w}_{\text{м}}}{d\xi}\right]_{\xi=0} = -\frac{1}{E\delta^2}\,\gamma_1\left(\frac{R}{\delta}\right), \qquad \text{(б)}$$

$$\overline{w}_Q(0) = -\frac{1}{E}\,\omega_2\left(\frac{R}{\delta}\right). \qquad \text{(в)} \quad (30)$$

Здесь

$$\omega_1 = 6(1-\mu^2)\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 = 3{,}3\,\frac{R}{\delta}$$

$$\gamma_1 = 12(1-\mu^2)\frac{1}{\varkappa}\,\frac{R}{\delta}\ ,$$

$$\omega_2 = 6(1-\mu^2)\,\frac{1}{\varkappa^3}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3. \tag{31}$$

Наконец, используя равенства (3), (14), (15), (18)—(21) и (30), запишем:

$$\Delta_{\text{мо}} = -\frac{P}{E_0\delta_0^2}\,\alpha_0, \qquad \text{(а)}$$

$$\delta_{\text{мм}} = \frac{1}{E_0\delta_0^2}\,\alpha_1 + \frac{1}{E\delta^2}\,\gamma_1, \qquad \text{(б)}$$

$$\delta_{\text{MQ}} = \delta_{\text{QM}} = \frac{1}{E_0\,\delta_0}\,\alpha_2 - \frac{1}{E\delta}\,\gamma_2, \qquad \text{(в)}$$

$$\delta_{\text{QQ}} = \frac{1}{E}\,\omega_2 + \frac{1}{E_0}\,\beta_2, \qquad \text{(г)}$$

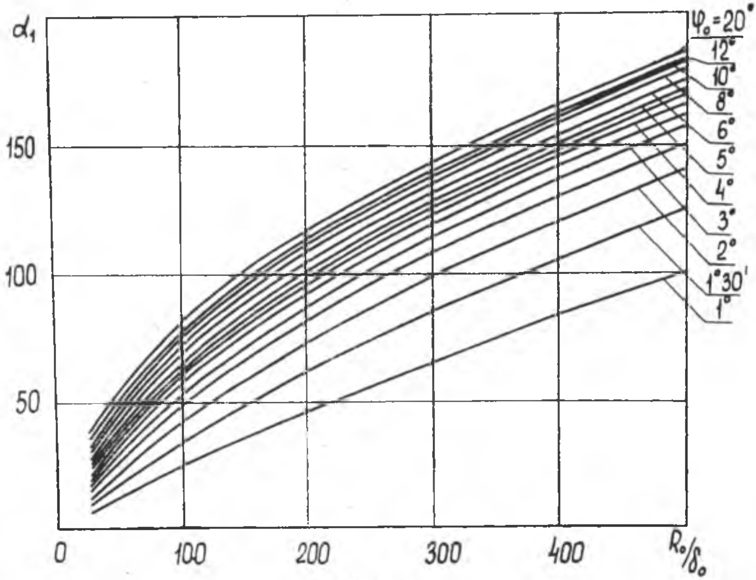
$$\Delta_{\text{QO}} = -\frac{\mu P}{2\pi E\delta} - \frac{P}{E_0\delta_0}\,\beta_0. \qquad \text{(д)} \quad (32)$$

Разрешая уравнения (2) относительно M и Q при значениях коэффициентов (32), будем иметь:

$$M = P\,\frac{\alpha_0 - \left(\beta_0 + \dfrac{\mu}{2\pi}\,\dfrac{E_0\delta_0}{E\delta}\right)\dfrac{\alpha_2 - \dfrac{E_0\delta_0}{E\delta}\,\gamma_2}{\beta_2 + \dfrac{E_0}{E}\,\omega_2}}{\alpha_1 + \dfrac{E_0\delta_0^2}{E\delta^2}\,\gamma_1 - \dfrac{\left(\alpha_2 - \dfrac{E_0\delta_0}{E\delta}\,\gamma_2\right)^2}{\beta_2 + \dfrac{E_0}{E}\,\omega_2}}, \tag{33}$$

$$Q = \frac{P}{\delta_0} \frac{\beta_0 + \frac{\mu}{2\pi}\frac{E_0\delta_0}{E\delta} + \frac{\alpha_0\left(\alpha_2 - \frac{E_0\delta_0}{E\delta}\gamma_2\right)}{\alpha_1 + E_0\delta_0^2/E\delta^2\gamma_1}}{\beta_2 + \frac{E_0}{E}\omega_2 - \frac{\left(\alpha_2 - \frac{E_0\delta_0}{E\delta}\gamma_2\right)^2}{\alpha_1 + \frac{E_0\delta_0^2}{E\delta^2}\gamma_1}}. \qquad (34)$$

Графики безразмерных коэффициентов α_1, β_1, β_2, γ_1 и ω_2* представлены на фиг. 6—9.

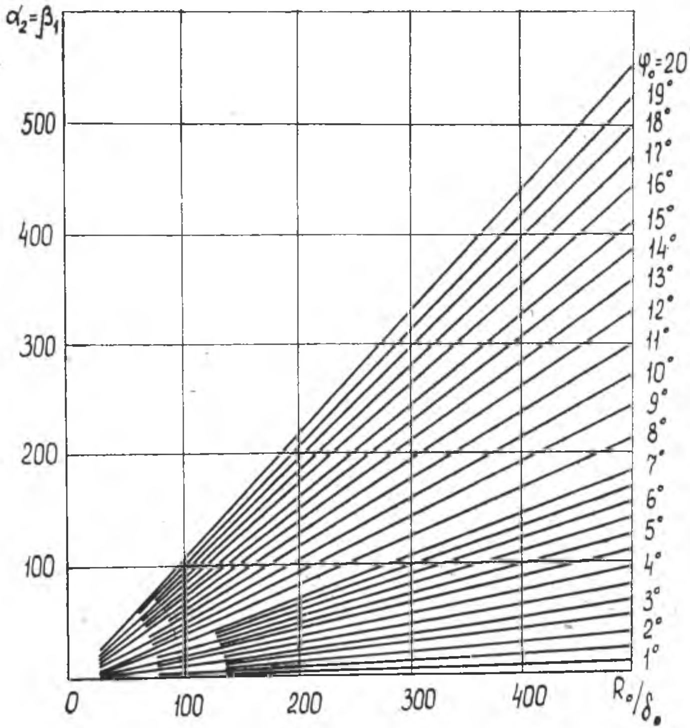


Фиг. 6.

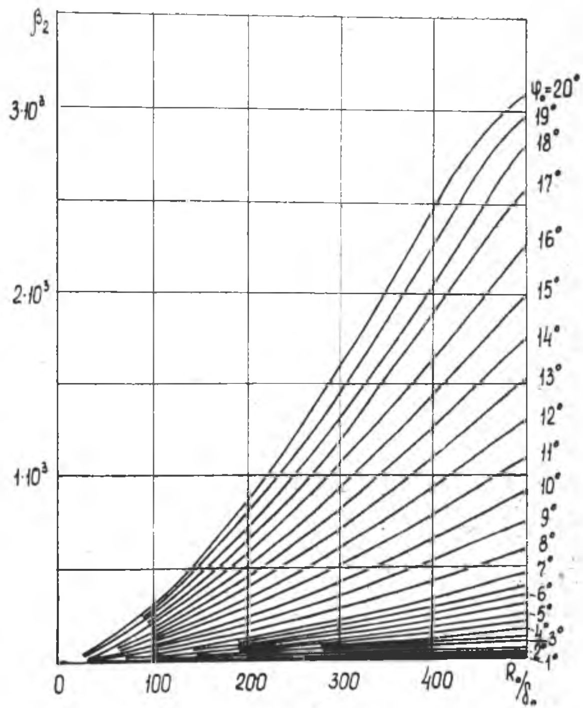
С помощью формулы (33) построен график (фиг. 10), показывающий влияние отношения $\frac{R_0}{\delta_0}$ на величину момента в сочленении при $\frac{E_0\delta_0}{E\delta} = 1$, $\frac{R}{\delta} = 13{,}3$ и $R = 20$ *мм*. С увеличением $\frac{R_0}{\delta_0}$ величина $\frac{M}{P}$ возрастает, (линия 1 на фиг. 10), оставаясь все время меньше его значения для случая сочленения трубки с пластиной (линия 3 фиг. 10).

Если пренебречь вторыми слагаемыми в числителе и знаменателе формулы (33) по сравнению с первыми, то ошибка в определении момента в сочленении не превышает 5%. Это означает,

* Программирование и вычисления всех величин на ЭЦВМ проведены инженером Ю. М. Арсентьевым.


α2=β1
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
R0/δ0
φ0=20°
19°
18°
17°
16°
15°
14°
13°
12°
11°
10°
9°
8°
7°
6°
5°
4°
3°
2°
1°

Фиг. 7.

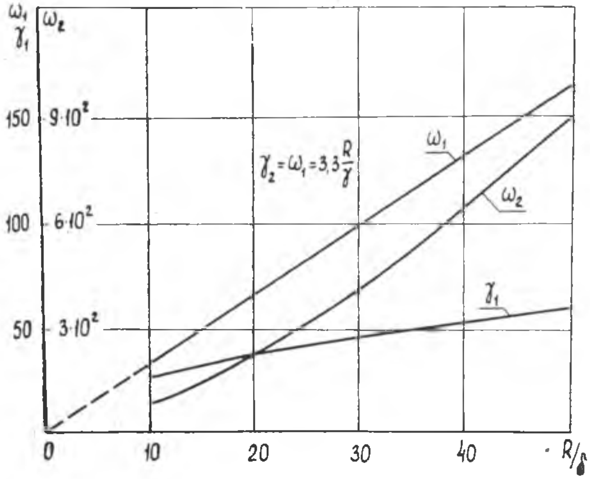

β2
3·10³
2·10³
1·10³
0
100
200
300
400
R0/δ0
φ0=20°
19°
18°
17°
16°
15°
14°
13°
12°
11°
10°
9°
8°
7°
6°
5°
4°
3°
2°
1°

Фиг. 8.

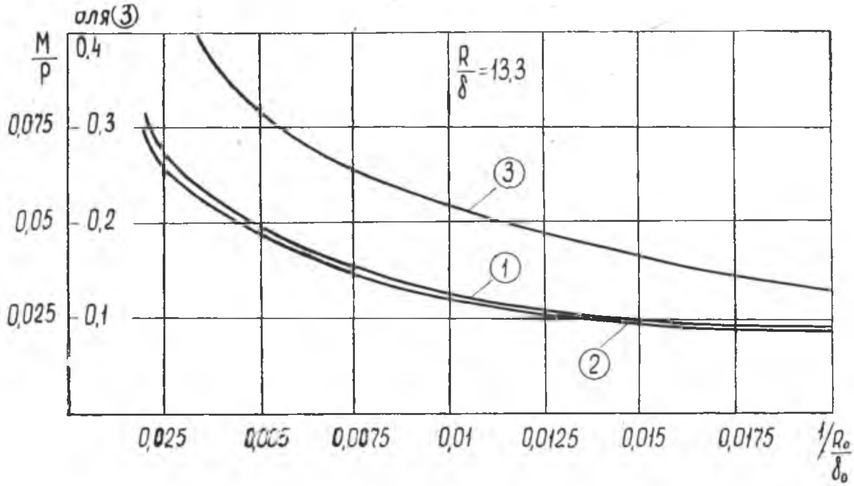
что в данном случае сила Q практически не влияет на величину момента (линия 2 на фиг. 10), и последний может быть определен по приближенной формуле:

$$M = -\frac{\Delta_{MO}}{\delta_{MM}} = P\frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \frac{E_0\delta_0^2}{E\delta^2}\gamma_1}, \qquad (35)$$

Расчеты показывают, что формула (35) применима и в тех случаях, когда значения $\frac{R}{\delta}$ отличны от рассмотренного выше.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

Изгибающие моменты и нормальные силы в произвольных сечениях трубки и сферической оболочки определяются по формулам:

$$M_\xi = -e^{-\varkappa\xi}(\sin\varkappa\xi + \cos\varkappa\xi)\,M + Q\,\frac{R}{\varkappa}\,e^{-\varkappa\xi}\sin\varkappa\xi,$$

$$N_\xi = -\frac{P}{2\pi R}\,; \tag{36}$$

$$M_\varphi = \frac{P}{a_1(\varphi_0)\,b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\,b_1(\varphi_0)}\left\{\left[\frac{1}{2\pi\,\frac{R_0}{\delta_0}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0} - \delta_0\,\frac{Q}{P}\sin\varphi_0\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,[b_1(\varphi_0)\,b_2(\varphi) - b_2(\varphi_0)\,b_1(\varphi)] + [a_1(\varphi_0)\,b_2(\varphi) - a_2(\varphi_0)\,b_1(\varphi)]\,\frac{M}{P}\right\} \tag{37}$$

$$N_\varphi = -\frac{P\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{(1-\mu^2)\,\frac{R_0}{\delta_0}\,[a_1(\varphi_0)\,b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\,b_1(\varphi_0)]}\left\{\left[\frac{1}{2\pi R_0\,\mathrm{tg}\,\varphi_0} - \frac{Q}{P}\sin\varphi_0\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,[b_1(\varphi_0)\,V_2 - b_2(\varphi_0)\,V_1] + [a_1(\varphi_0)\,V_2 - a_2(\varphi_0)\,V_1]\,\frac{M}{P\delta_0}\right\} - \frac{P}{2\pi R_0}\,. \tag{38}$$

Напряжения в трубке и сферической оболочке будут равны

$$\sigma_\xi = -\frac{P}{2\pi R\delta} \pm \frac{6M_\xi}{\delta^2}\,, \tag{39}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{\delta_0} \pm \frac{6M_\varphi}{\delta_0^2}\,. \tag{40}$$

По полученным формулам проведен числовой расчет сочленения с параметрами $\frac{R_0}{\delta_0} = 200$, $\frac{R}{\delta} = 13{,}3$, $\frac{E_0\delta_0}{E\delta} = 1$, при $R = 20$ *мм*. Оказалось, что в сочленении $\frac{M}{P} = 0{,}0495$, а $\frac{Q}{P}\,\delta_0 = 0{,}0208$. Закон изменения напряжений, возникающих при этом в трубке и сферической оболочке, приведен на фиг. 11 и 12.

Рассмотрим теперь случай, когда система подвержена действию внутреннего избыточного давления p (фиг. 3 а). При решении задачи, в соответствии с рассмотренным методом, необходимо заново определить лишь коэффициенты Δ_{MO} и Δ_{QO} системы уравнений (2) по формулам:

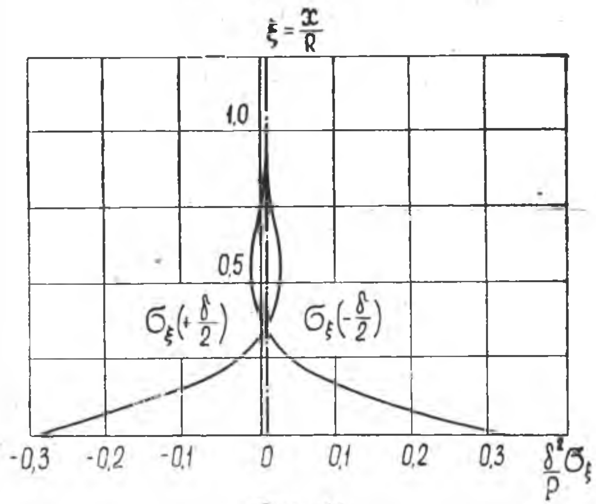
$$\Delta_{MO} = p\,\frac{\pi R^2}{E_0\delta_0^2}\,\alpha_0, \tag{41}$$

$$\Delta_{QO} = -pR^2\left[\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{E\delta} - \left(\pi\beta_0 + \frac{1-\mu}{2\sin\varphi_0}\right)\frac{1}{E_0\delta_0}\right]. \tag{42}$$

Учитывая выражения (32 б, в, г) и (41)—(42), из системы уравнений (2) получим:

$$M = -pR^2 \frac{\pi\alpha_0 + \left[\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{E_0\delta_0}{E\delta} - \pi\beta_0 - \frac{1-\mu}{2\sin\varphi_0}\right]\dfrac{\alpha_0 - \frac{E_0\delta_0}{E\delta}\gamma_2}{\beta_2 + \frac{E_0}{E}\omega_2}}{\alpha_1 + \frac{E_0\delta_0^2}{E\delta^2}\gamma_1 - \dfrac{\left(\alpha_2 - \frac{E_0\delta_0}{E\delta}\gamma_2\right)^2}{\beta_2 + \frac{E_0}{E}\omega_2}} \tag{43}$$

$$Q = -p\frac{R^2}{\delta_0} \frac{\pi\beta_0 - \frac{1-\mu}{2\sin\varphi_0} - \left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{E_0\delta_0}{E\delta} + \pi\alpha_0 \dfrac{\alpha_2 - \frac{E_0\delta_0}{E\delta}\gamma_2}{\alpha_1 + E_0\delta_0^2/E\delta^2\gamma_1}}{\beta_2 + \frac{E_0}{E}\omega_2 - \dfrac{\left(\alpha_2 - \frac{E_0\delta_0}{E\delta}\gamma_2\right)^2}{\alpha_1 + \frac{E_0\delta_0^2}{E\delta^2}\gamma_1}} \tag{44}$$



Фиг. 11.

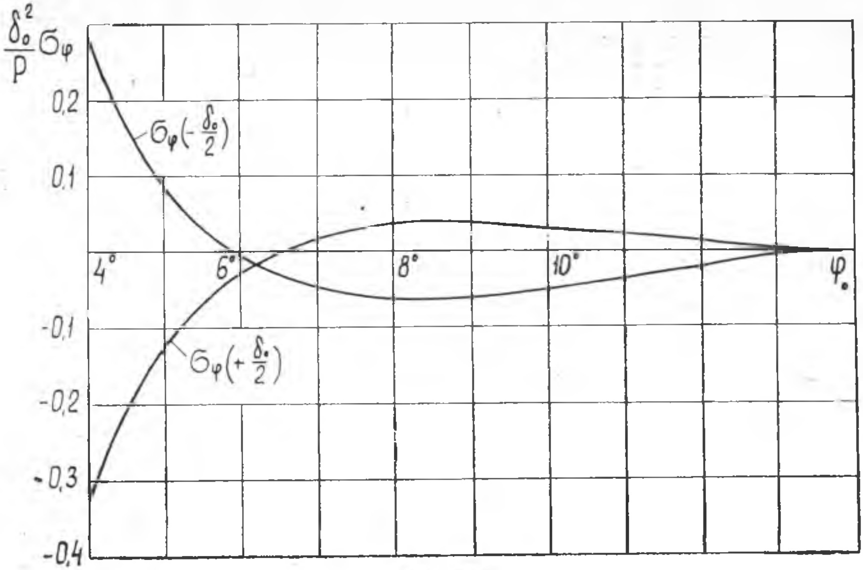
При этом для определения изгибающих моментов в произвольных сечениях трубки и сферической оболочки можно воспользоваться формулами (36) — (37), положив в них $P = p\pi R^2$. Значения же нормальных усилий будут равны

$$N_\xi = p\frac{R}{2}, \tag{45}$$

$$N_\varphi = \frac{p\pi R^2}{(1-\mu^2)\left[a_1(\varphi_0)\, b_2(\varphi_0) - a_2(\varphi_0)\, b_1(\varphi_0)\right]\frac{R_0}{\delta_0}} \left\{\left[\frac{1}{2\pi R_0 \operatorname{tg}\varphi_0} - \sin\varphi_0\right] \times\right.$$

$$\left. \times\left[b_1(\varphi_0) V_2 - b_2(\varphi_0) V_1\right]\frac{Q}{p\pi R^2} + \frac{M}{p\pi R^2\delta_0}\left[a_1(\varphi_0) V_2 - a_2(\varphi_0) V_1\right]\right\} + p\frac{R_0}{2}. \tag{46}$$

Отметим в заключение, что формулы (33), (34), (43) и (44) дают возможность анализировать напряженное состояние сферической оболочки, к которой вместо упругой трубки присоединена жесткая вставка или шайба. Для этого в указанных формулах



Фиг. 12.

следует обратить в нуль все величины, обусловленные деформацией трубки. Так положив $E\delta=\infty$, а $\gamma_2=\omega_2=\gamma_1=0$, получим, например,

$$M = P\frac{\alpha_0 - \beta_0\frac{\alpha_2}{\beta_2}}{\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2}} \tag{45}$$

или

$$M = -pR^2\frac{\pi\alpha_2 - \left(\pi\beta_0 + \frac{1-\mu}{2\sin\varphi_0}\right)\frac{\alpha_2}{\beta_2}}{\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2}}. \tag{46}$$

Формулы (33), (34), (43), (44) и (46) позволяют быстро оценить напряженное состояние зоны сочленения цилиндрических и сферических оболочек при осесимметричном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки, Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963.
2. В. Флюгге. Статика и динамика оболочек, Госстройиздат, 1961.
3. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек, Гостехиздат, 1947.

4. Ю. Л. Тарасов. Исследования напряжений в сочленениях трубопроводов со сферическими днищами, Юбилейная научно-техническая конференция. Тезисы докладов, Куйбышевский авиационный институт, Куйбышев, 1967.

5. F. A. Leckie, Localized Loads Applied to Spherical Shells, Iournal Mechanical Engineering Science, V. 3, N 2. 1961.

6. P. P. Bijlaard, Local Stresses in Spherical Shells from Radial or Moment Loadings, Welding Research Suppl, May., 1957.

7. G. D. Galletly, Influence Coefficients for Open-Crown Hemispheres, J. of Engineering for Industry, january 1960.

8. Ф. Уитт, Р. Гвелтни, Р. Максвелл, Р. Холлэнд. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов для сферических оболочек с одним жестко прикрепленным патрубком. Труды Американского общества инженеров-механиков, Энергетические машины и установки, (русский перевод), № 3, 1967.

9. Джонсон. Напряжения в сферической оболочке с нерадиальным патрубком. Труды Американского общества инженеров-механиков, прикладная механика, (русский перевод) № 2, 1967.

10. Simp. Nuclear Reactor Containment Buildings and Pressure Vessels, Glasgow, 1960.