

Ю.Л.Терёсов, В.Я.Логунов, В.И.Широкова

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ  
СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ И МОМЕНТОМ ЧЕРЕЗ УПРУГИЙ ШПАНГОУТ

Принятые обозначения:

- $R, \delta$  - радиус срединной поверхности и толщина оболочки;  
 $l$  - длина оболочки;  
 $\xi = \frac{x}{R}, \varphi$  - координаты точек срединной поверхности оболочки;  
 $u, v, w$  - проекции полного перемещения точек срединной поверхности оболочки на оси  $x, y, z$  ;  
 $w'$  - угол поворота нормали;  
 $N_1, N_2, Q_1, Q_2, T, M_1, M_2, H_1, H_2$  - нормальные, перерезывающие и касательные усилия, изгибающие и крутящие моменты в сечениях оболочки;  
 $\mu, E$  - коэффициент Пуассона и модуль упругости материала конструкции;  
 $B$  - жесткость сечения шпангоута на растяжение;  
 $B_x, B_z$  - жесткость сечения шпангоута на изгиб относительно осей  $x, z$  ;  
 $C$  - жесткость сечения шпангоута на кручение.

Рассматривается консольная цилиндрическая оболочка, жестко заделанная по одному из торцов и нагруженная через упругий шпангоут системой сосредоточенных сил  $P_x, P_z$  и моментом  $M_y$  на другом ее торце (рис. 1).

Исследуется напряженно-деформированное состояние кольца-шпангоута и оболочки в зоне сочленения, при этом предполагается, что материал работает в пределах пропорциональности. В работе используется теория Лява-Тимошенко в интерпретации В.М.Даревского [1], согласно которой разрешающее уравнение для цилинд-

рической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^8 \Phi}{d\xi^8} + 4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \varphi^2} + 6 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \varphi^4} + 4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^6} + \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \varphi^8} + 2\mu \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6} + \\ & + 6 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \varphi^2} + 2(4-\mu) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{1-\mu}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \\ & + 2(2-\mu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} = 0. \end{aligned} \quad (I)$$

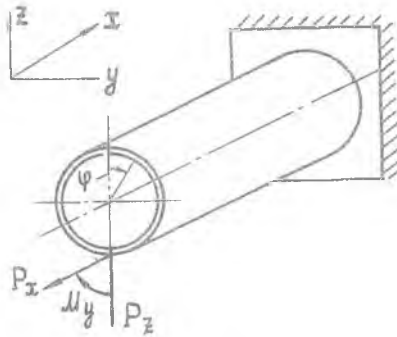


Рис. 1.

При выводе разрешающего уравнения удерживались члены, содержащие множитель  $c^2 = \frac{\delta^2}{12 R^2}$ . Положительные направления усилий и перемещений показаны на рис. 2.

Основная функция  $\Phi(\xi, \varphi)$  отыскивается в форме

$$\Phi(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\xi) \cos n\varphi. \quad (2)$$

Решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^8 X_n}{d\xi^8} + A_n \frac{d^6 X_n}{d\xi^6} + B_n \frac{d^4 X_n}{d\xi^4} + C_n \frac{d^2 X_n}{d\xi^2} + D_n = 0, \quad (3)$$

которое получается из (I) путем подстановки в него (2), представим следующим образом:

$$X_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^4 [A_{nl} X_{nl}(\xi) + A_{nl}^* X_{nl}^*(\xi)], \quad (4)$$

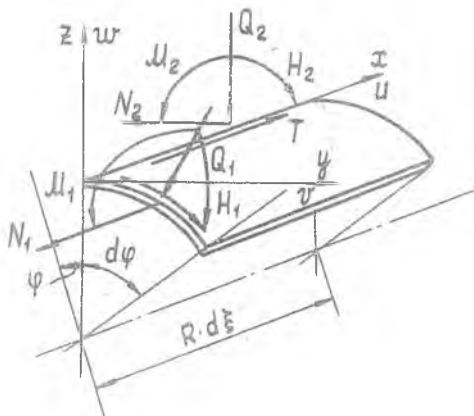


Рис. 2.

здесь для  $n \geq 2$

$$X_{n(1,2)} = e^{\mp P_n \xi} \cos q_n \xi, \quad X_{n(3,4)} = e^{\mp P_n \xi} \sin q_n \xi \quad (5)$$

$$X_{n(1,2)}^* = e^{\mp P_n^* \xi} \cos q_n^* \xi, \quad X_{n(3,4)}^* = e^{\mp P_n^* \xi} \sin q_n^* \xi, \quad (6)$$

для  $n=0$  и  $n=1$  выражения (5) остаются без изменений, а вместо (6) имеем

$$X_{01}(\xi) = X_{11}(\xi) = \xi^3, \quad X_{03}(\xi) = X_{13}(\xi) = \xi,$$

$$X_{02}(\xi) = X_{12}(\xi) = \xi^2, \quad X_{04}(\xi) = X_{14}(\xi) = 1,$$

$P_n, P_n^*, q_n, q_n^*$  - корни характеристического уравнения,  $A_{n1}, A_{n1}^*$  - постоянные интегрирования.

В результате решения задачи были получены следующие окончательные формулы для определения усилий и перемещений в оболочке:

$$u = - \frac{P_x(\xi_k - \xi)}{2\pi E \delta} - 6\mu A_{01}^* + [3(2\mu + \xi^2)A_{11}^* + 2\xi A_{12}^* + A_{13}^*] \cos \varphi + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n u_n^*) \cos n\varphi,$$

$$w = [ \xi (\xi^2 - 6\mu - 12) A_{11}^* - (\xi^2 - 2\mu - 4) A_{12}^* - \xi A_{13}^* - A_{14}^* ] \sin \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (v_n + v_n \cdot v_n^*) \sin n\varphi,$$

$$w' = \frac{\mu P_x (\xi_k - \xi)}{2\pi E \delta} + [ \xi (\xi^2 - 12) A_{11}^* + (\xi^2 - 4) A_{12}^* + \xi A_{13}^* + A_{14}^* ] \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (w_n + v_n \cdot w_n^*) \cos n\varphi,$$

$$w'' = \frac{1}{R} \left\{ [ 3(\xi^2 - 4) A_{11}^* + 2\xi A_{12}^* + A_{13}^* ] \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (w_n' + v_n w_n'^*) \cos n\varphi \right\},$$

$$N_1 = \frac{P_x}{2\pi R} - \frac{E \delta}{R} [ (6\xi A_{11}^* + 2A_{12}^*) \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (N_{1n} + v_n N_{1n}^*) \cos n\varphi ],$$

$$N_2 = \frac{E \delta}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (N_{2n} + v_n N_{2n}^*) \cos n\varphi,$$

$$T = \frac{E \delta}{R} [ 6A_{11}^* \sin \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n + v_n T_n^*) \sin n\varphi ],$$

$$M_1 = - \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)R^2} \left\{ [ 6(2-\mu^2)\xi A_{11}^* + 2(2-\mu^2)A_{12}^* ] \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (M_{1n} + v_n M_{1n}^*) \cos n\varphi \right\},$$

$$M_2 = - \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{E \delta^3}{R^2} [ (6\mu\xi A_{11}^* + 2\mu A_{12}^*) \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (M_{2n} + v_n M_{2n}^*) \cos n\varphi ] \quad (7)$$

$v_n = 1$  при  $n \geq 2$ ,  $v_n = 0$  при  $n = 0$  и  $n = 1$ .

В формулах (7)  $u_n, v_n, \dots, M_n, u_n^*, v_n^*, \dots, M_n^*$  — зависимости, определяемые функцией (4) и ее производными.

Постоянные интегрирования, входящие в (7), находятся из условий совместной работы оболочки и кольца-шпангоута в месте их сопряжения, а также из граничных условий на закрепленном торце.

При  $\xi = 0$  имеем

$$\begin{aligned} u(0, \varphi) &= -u_k, & w'(0, \varphi) &= 0, & T(0, \varphi) &= -P_y \\ v(0, \varphi) &= v_k, & N_1(0, \varphi) &= -P_x, & M_1(0, \varphi) &= -m_y \end{aligned} \quad (8)$$

$$w(0, \varphi) = w_k, \quad Q_1(0, \varphi) = P_z, \quad H_1(0, \varphi) = -m_x;$$

при  $\xi = \xi_k = \frac{l}{R}$

$$u(\xi_k, \varphi) = 0, \quad v(\xi_k, \varphi) = 0, \quad w(\xi_k, \varphi) = 0, \quad w'(\xi_k, \varphi) = 0. \quad (9)$$

Здесь  $u_k, v_k, w_k, \theta$  - перемещения и угол поворота нормали кольца-шпангоута. Расчетные формулы для них даны в работе [3]. Чтобы показать структуру этих формул, приведем в качестве примера выражение для  $u_k$

$$\begin{aligned} u_k &= A_0 + \frac{kR^3 P_x}{4\pi B_z} \left( \frac{\pi^2}{3} + \frac{2}{k} + 4 \right) + A_1 + \frac{(k+1)R^3 P_x}{8\pi B_z} \left( \frac{\pi^2}{3} + \right. \\ &= \frac{3}{2} + \frac{10k}{k+1} \left. \right) + (-1)^n \frac{R^3 P_x}{\pi B_z} \alpha_n + \frac{R^3}{B_z} (\alpha_n R P_{zn} + \beta_n m_{yn} + \gamma_n m_{zn}), \\ k &= \frac{B_z}{C}, \quad \alpha_n = \frac{k+n^2}{n^2(n^2-1)^2}, \quad \beta_n = \frac{k+1}{(n^2-1)^2}, \quad \gamma_n = n \cdot \alpha_n, \end{aligned}$$

где

$A_0, A_1$  - постоянные интегрирования,

$P_x, P_y, P_z, m_x, m_y$  - силы взаимодействия кольца и оболочки.

Необходимость использования условий (9) при расчете напряженно-деформированного состояния оболочки в зоне сочленения вытекает из того, что при  $n \geq 2$  медленно убывающие и медленно возрастающие функции  $X_{ni}^*(\xi)$ , как показали расчеты, оказывают значительное влияние на распределение усилий и перемещений вдоль образующих оболочки. Таким образом, даже при расчете длинных оболочек при  $n \geq 2$  нельзя пренебрегать взаимным влиянием краев и отбрасывать медленно возрастающие функции как не удовлетворяющие физическому смыслу решения задачи.

Заданных граничных условий достаточно для нахождения постоянных интегрирования, т.е. напряженно-деформированное состояние оболочки и кольца-шпангоута определяется однозначно.

По приведенным расчетным формулам (7), приняв во внимание (8) и (9), была составлена программа расчета на ЭВМ БЭСМ-4. В настоящей статье в качестве примера приводятся результаты расчета для одного частного случая нагружения оболочки силой  $P_x$ . Расчет проводился при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned}
 B &= 0,672 \cdot 10^7 \text{ см}^2 & E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \\
 \bar{B}_x &= \frac{B_x}{B} = 0,312 & R &= 10 \text{ см} \\
 \bar{B}_z &= \frac{B_z}{B} = 0,49 & R/\delta &= 100 \\
 \bar{C} &= \frac{C}{B} = 2 \cdot 10^3 & \xi_K &= 3
 \end{aligned}$$

Графики, показывающие характер изменения внутренних усилий вдоль образующей оболочки  $\varphi = \pi$ , представлены на рис. 3.

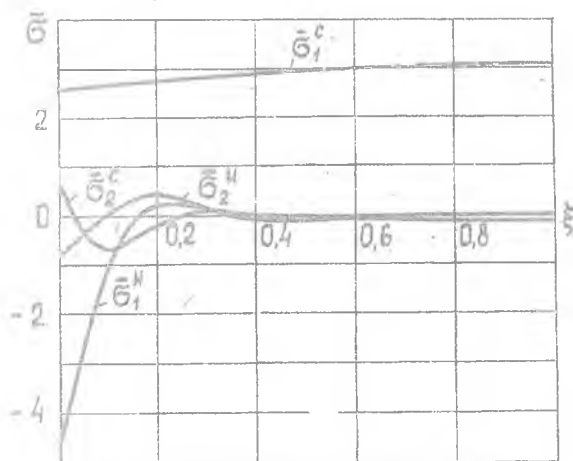


Рис. 3.

Через  $\bar{\sigma}_1^c$  и  $\bar{\sigma}_2^c$  обозначены напряжения в срединной поверхности от усилий  $N_1$  и  $N_2$ , а через  $\bar{\sigma}_1^H$  и  $\bar{\sigma}_2^H$  — напряжения от изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$ , отнесенные к  $\sigma^0 = P_x / 2\pi R \delta$

Из графиков видно, что напряжения, характеризующие работу оболочки на изгиб, резко убывают по мере удаления от зоны сопряжения оболочки со шпангоутом.

В заключение можно отметить, что при числовом расчете с 5% степенью точности требовалось удерживать в разложениях до пяти членов ряда.

### Л и т е р а т у р а

1. Даревский В.И. ПММ; т. XXI, вып. 3, 1961.
2. Хазанов Х.С., Тарасов Ю.Л. ИВУЭ, "Авиационная техника", № 4, 1964.
3. Ахмедьянов И.С. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.