

А. С. Мостовой

РАСЧЕТ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОБРАЗЦА ПРИ ПРОГРАММНОЙ
(СЛУЧАЙНОЙ) НАГРУЗКЕ

В работе [3] изложен расчетный метод определения долговечности образца при гармонической нагрузке на основе некоторых представлений о механизме усталостного разрушения.

Сущность этих представлений заключается в рассмотрении дискретной модели среды в виде совокупности несвязанных между собой и не оказывающих друг на друга давления дискретных элементов — волокон. Накопление повреждений в волокне подчиняется гипотезе Палмгрена-Майнера и определяется кривой усталости по трещине. Последняя представляет собой зависимость между действительным напряжением в волокне и числом циклов, соответствующих появлению первой макротрещины, т. е. соответствующих разрушению волокна.

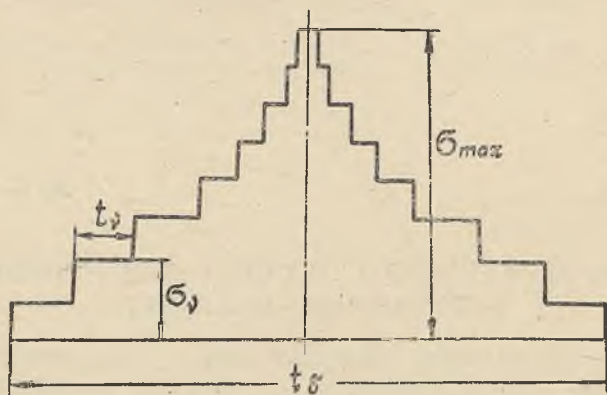
Величина $\sum \frac{n_i}{N_i} = \frac{n_0}{N_0} + \frac{n_1}{N_1} + \dots + \frac{n_{\text{разр}}}{N_{\text{разр}}}$ представляет собой сумму повреждений, полученного некоторым волокном в момент начала образования трещины (после n_0 циклов) и повреждений от переменных уровней напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, которые возникают в результате последовательного разрушения предыдущих волокон и которым соответствуют цикловые отношения $\frac{n_1}{N_1}, \frac{n_2}{N_2}, \dots$.

Кривая усталости по трещине является по существу кривой Вёлера для волокна и может быть получена экспериментально для заданной вероятности.

Строгое определение долговечности образца при случайной нагрузке в свете рассмотренных представлений весьма затруднено, так как повреждение волокна в каждый момент времени зависит от его напряженного состояния и истории его нагружения, т. е. от чередования случайных нагрузок.

Известно, что программное нагружение достаточно хорошо

воспроизводит случайные нагрузки [2]. Известно также, что форма блока программной нагрузки при количестве блоков не менее 15—20 и количестве ступеней в блоке не менее 10—12 мало влияет на долговечность образца. На основании этого определение долговечности при случайной нагрузке может быть сведено к определению долговечности при эквивалентной ей программной нагрузке.



Фиг. 1.

По известным числовым характеристикам случайного процесса устанавливается закон распределения и формируются блоки программной нагрузки. При этом число циклов n_σ с напряжением, лежащим в интервале $\sigma_i - \sigma_{i+1}$, определится из следующего выражения:

$$n_\sigma = \sum_v n_v \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(\sigma) d\sigma. \quad (1)$$

Соответствующее повреждение волокна будет равно

$$D_i = \sum_v n_v \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{f(\sigma)}{N_i} d\sigma. \quad (2)$$

Здесь n_v — число циклов v -го уровня нагружения, $f(\sigma)$ — плотность вероятности распределения случайной нагрузки.

Рассмотрим многоступенчатую нагрузку с R блоками постоянной продолжительности $t_\delta = \text{const}$ и с r уровнями напряжений в блоке, каждый продолжительностью $t_v = \text{var}$ (фиг. 1).

Будем вести счет уровней последовательно, независимо от числа блоков, и обозначим через v порядковый номер уровня до появления трещины, отсчитанный от начала нагружения и через \bar{v} — порядковый номер уровня после появления трещины, также отсчитанный от начала нагружения.

Имеем аппроксимированную кривую усталости по трещине в полулогарифмических координатах $\ln N = a - b\sigma$.

Не нарушая общности изложения, рассмотрим консольный изгибаемый образец с концентратором в виде отверстия (фиг. 2).



Фиг. 2.

Схема распределения напряжений в сечении образца в разные моменты времени изображена на фиг. 3. Здесь σ_i^n и σ_k^n — напряжения в волокнах i и k в момент разрушения волокна n . Соответствующее разрушающее число циклов, определяемое кривой усталости по трещине, обозначим через N_i^n и N_k^n .

Время τ_0 до появления трещины (время до разрушения нулевого волокна), предполагая линейное накопление повреждений в волокне, можно определить из выражений:

$$D_0 = \sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} \frac{n_v}{N_v^0} = \sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} t_v \omega e^{b\sigma_v^0 - a} = 1, \quad (3)$$

$$\tau_0 = \sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} t_v. \quad (4)$$

Здесь v_{τ_0} — число уровней до момента возникновения трещины;

ω — частота приложенной нагрузки.

Индекс v в обозначении напряжения σ_v^0 свидетельствует о том, что напряжение в нулевом волокне соответствует v -му уровню нагружения.

Рассмотрим два бесконечно близких волокна — i и $(i+1)$ — в момент времени τ_i разрушения i -го волокна. Приращение повреждения при переходе от волокна i к волокну $(i+1)$ состоит из приращения dD_i^0 повреждения D_i^0 , накопленного за время от $\tau = 0$ до τ_0 , и

Учитывая, что $dD_i^n = \frac{\omega d\tau}{N_i}$, для интервала времени $\tau_0 - \tau_i$ будем иметь

$$\frac{d\Delta D_i^i}{dh_i} = \sum_{v=\tau_0}^{\bar{v}_i} \int_{h_v^-}^{h_{v+1}^-} \frac{d\tau}{dh} \omega \frac{d}{dh_i} \left(\frac{1}{N_{i\bar{v}}^n} \right) dh. \quad (6)$$

За время от τ_i до τ_{i+1} (т. е. до момента разрушения $(i+1)$ -го волокна) приращение повреждения $(i+1)$ -го волокна будет равно dD_{i+1}^{i+1} .

Тогда

$$\frac{dD_{i+1}^{i+1}}{dh_i} = \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i \omega e^{b\sigma_{(i+1)\bar{v}}^{i+1} - a}. \quad (7)$$

В момент времени τ_{i+1} происходит разрушение $(i+1)$ -го волокна ($D_{i+1}^{i+1} = 1$). Суммарное приращение его повреждения равно нулю и, следовательно,

$$\frac{dD_i^0}{dh_i} + \frac{d\Delta D_i^i}{dh_i} + \frac{dD_{i+1}^{i+1}}{dh_i} = 0.$$

Используя (5), (6) и (7), получаем интегральное уравнение относительно производной, обратной величине скорости распространения трещины по координате h .

$$\sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} t_v \omega e^{b\sigma_{i\bar{v}}^0 - a} b \frac{d\sigma_{i\bar{v}}^0}{dh_i} + \sum_{v=\tau_0}^{\bar{v}_i} \int_{h_v^-}^{h_{v+1}^-} \frac{d\tau}{dh} \omega \frac{d}{dh_i} \left(\frac{1}{N_{i\bar{v}}^n} \right) dh + \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i \omega e^{b\sigma_{(i+1)\bar{v}}^{i+1} - a} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем будем рассматривать такие смежные волокна, время разрушения которых отличается на длительность одной ступени, т. е. $\Delta\tau_i = t_v^-$. Тогда в пределах одной ступени блока программной нагрузки подынтегральное выражение в формуле (8) можно принять постоянным.

Учитывая, что при принятой индексации время действия напряжения σ_i^n равно $\Delta\tau_{n-1}$, а соответствующее изменение координаты есть Δh_{n-1} , из уравнения (8) получим в конечных приращениях

$$\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i = - \left[\sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} t_v e^{x_{i\bar{v}}^0 - x_{(i+1)\bar{v}}^{i+1}} b \frac{d\sigma_{i\bar{v}}^0}{dh_i} + \sum_{n=1}^i \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_{n-1} \left(e^{x_{(i+1)\bar{v}}^n - x_{(i+1)\bar{v}}^{i+1}} - e^{x_{i\bar{v}}^n - x_{(i+1)\bar{v}}^{i+1}} \right) \frac{\Delta h_{n-1}}{\Delta h_i} \right]. \quad (9)$$

Аналогичное выражение получится и для $\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k$:

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k = - \left[\sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} t_v e^{x_{kv}^0 - x_{(k+1)v}^{k+1}} b \frac{d\sigma_{kv}^0}{dx_k} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{n-1} \left(e^{x_{(k+1)v}^n - x_{(k+1)v}^{k+1}} - e^{x_{kv}^n - x_{(k+1)v}^{k+1}} \right) \frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_k} \right]. \quad (10)$$

Здесь $x_{iv}^n = b\sigma_{iv}^n - a$; $x_{kv}^n = b\sigma_{kv}^n - a$.

Зависимости (9) и (10) являются рекуррентными и решаются численными методами с помощью ЭВМ.

Время разрушения i -го и k -го волокон будет равно:

$$\tau_i = \int_{h_i}^{h_i} \left(\frac{d\tau}{dh}\right)_i dh_i, \quad \tau_k = \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_k dx_k.$$

Время τ_p распространения трещины до разрушения образца определяется из этих же формул при $h_i = h_p$ или $x_k = x_p$, где координаты h_p , x_p соответствуют появлению в волокне разрушающего напряжения.

Долговечность получим из формулы:

$$T = \tau_0 + \tau_p.$$

При низком уровне напряжений в точке $x_k = x_0 + c$ (см. фиг. 3) напряжение σ_k^k не достигает разрушающего и тогда трещина распространяется вдоль оси y . Поврежденная площадь в этом случае ограничивается линией $i-j$ (фиг. 3).

Аналогично предыдущему, получим выражение для производной $\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_j$:

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_j = - \left[\sum_{v=1}^{v_{\tau_0}} t_v e^{x_{jv}^0 - x_{(j+1)v}^{j+1}} b \frac{d\sigma_{jv}^0}{dy_j} + \sum_{n=1}^n \left(\frac{d\tau}{dx}\right)_{n-1} \left(e^{x_{(j+1)v}^n - x_{(j+1)v}^{j+1}} - e^{x_{jv}^n - x_{(j+1)v}^{j+1}} \right) \frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta y_j} + \sum_{m=u+1}^j \left(\frac{d\tau}{dy}\right)_{m-1} \left(e^{x_{(j+1)v}^m - x_{(j+1)v}^{j+1}} - e^{x_{jv}^m - x_{(j+1)v}^{j+1}} \right) \frac{\Delta y_{m-1}}{\Delta y_j} \right]. \quad (11)$$

Скорость распространения трещины вдоль оси h определяется формулой (9).

Время τ_p распространения трещины находится для этого случая как меньшая из двух величин:

$$\tau_{jp} = \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k dx_k + \int_H^{y_p} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)_j dy_j,$$

или

$$\tau_{ip} = \int_H^{h_p} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i dh_i.$$

Относительная поврежденная площадь \bar{F}_{II} и скорость ее изменения $\frac{d\bar{F}_{II}}{d\tau}$ определяются из выражений:

$$\bar{F}_{ik} = \frac{F_{ik}}{F_0} = \frac{2(x_k - x_0)(H - h_i)}{F_0}, \quad (12)$$

$$\bar{F}_{ij} = \frac{F_{ij}}{F_0} = 1 - \frac{y_j + h_i}{2H}, \quad (13)$$

$$\frac{d\bar{F}_{ik}}{d\tau} = \frac{2}{F_0} \left[\frac{dx_k}{d\tau} (H - h_i) - \frac{dh_i}{d\tau} (x_k - x_0) \right], \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{F}_{ij}}{d\tau} = -\frac{1}{2H} \left[\left(\frac{dy}{d\tau} \right)_j + \left(\frac{dh}{d\tau} \right)_i \right]. \quad (15)$$

Обозначения приняты здесь в соответствии с фиг. 3.

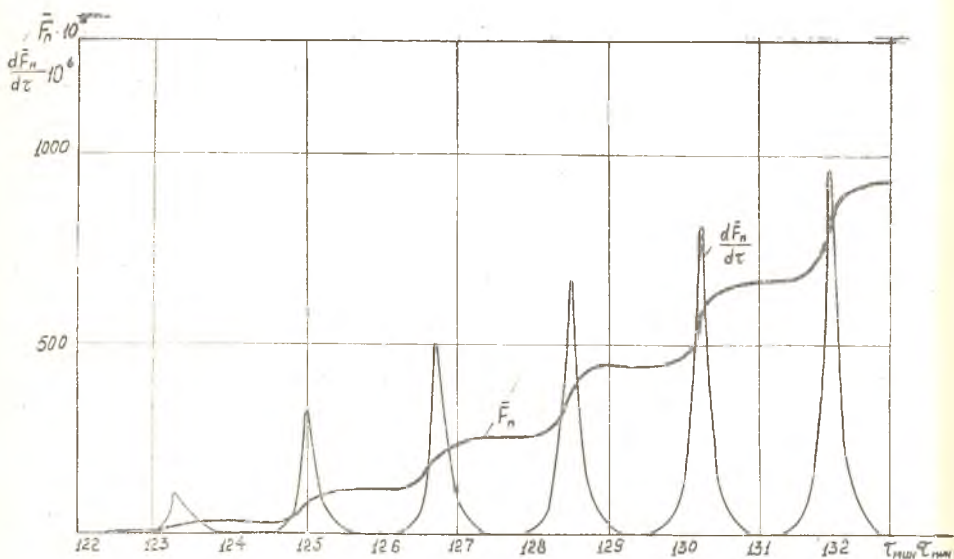
Рассмотрим консольный изгибаемый образец из материала 30ХГСА (фиг. 2) при программной нагрузке, симметричный блок которой показан на фиг. 1. Параметры блока сведены в таблицу 1. (k_v — коэффициент, характеризующий уровень напряжения v -й степени).

Таблица 1

№ ступени v	1	2	3	4	5	6	7	8
κ_v	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
t_v сек	13	12	12	7	4	2	1	1

При принятом уровне напряжения $\sigma_{\max} = 7492$ кг/см² (номинальные напряжения восьмой и девятой ступеней) расчет на ЭВМ не был доведен до момента разрушения образца из-за ограниченных возможностей ЭВМ Урал-2. Зависимости \bar{F}_{II} по τ и $\frac{d\bar{F}_{II}}{d\tau}$ по τ на начальной стадии нагружения показаны на фиг. 5.

Долговечность при указанном уровне определялась методом форсирования, изложенным в работе [6], дающим обычно некоторый запас долговечности. Принимались два значения коэффициентов форсирования: $k_{\phi 1} = 3$ и $k_{\phi 2} = 4$, где $k_{\phi} = \frac{\sigma_{\phi}}{\sigma}$, σ_{ϕ} — уровень напряжения при форсировании. Уровни напряжений всех ступеней исходного блока повышались в k_{ϕ} раз.



Фиг. 5.

Определенные на ЭВМ долговечности для $k_{\phi 1}$ и $k_{\phi 2}$ составили соответственно 17,42 мин и 7,22 мин. Далее линейная зависимость k_{ϕ} от T в двойных логарифмических координатах экстраполировалась до уровня $k_{\phi} = 1$. Долговечность получалась равной 630 мин. Из эксперимента при программной нагрузке этого же уровня значение долговечности составило $T_{\text{экс}} \approx 835$ мин. и было получено с вероятностью 50%.

Ускоренный метод определения долговечности образцов при программной (случайной) нагрузке. Эквивалентный гармонический режим

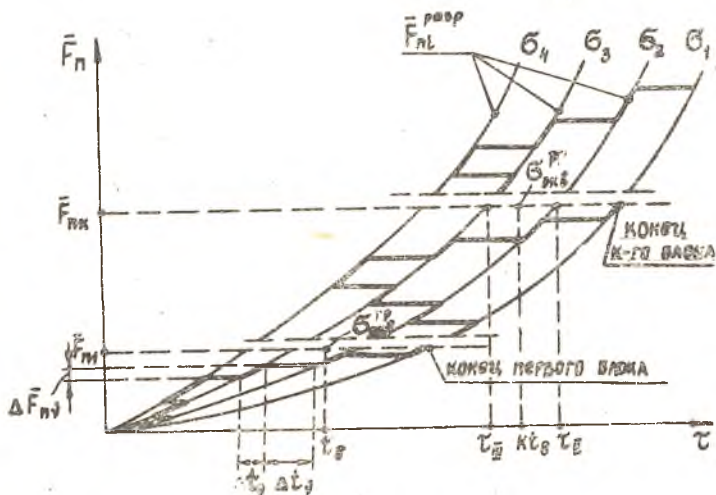
Программная нагрузка во многих случаях имеет ступени малой продолжительности (порядка нескольких секунд) и вычисление большого числа производных по рекуррентным зависимостям оказывается весьма громоздким.

При некоторых допущениях определение долговечности для ступенчатой нагрузки без существенных погрешностей может быть упрощено и ускорено [4].

Эти допущения сводятся к следующему:

1. При переходе с одного уровня нагружения на другой процесс накопления повреждений происходит с параметрами \bar{F}_n и $\frac{d\bar{F}_n}{dt}$ соответствующими новому уровню.

2. Значение относительной поврежденной площади в момент разрушения образца $\bar{F}_n^{\text{разр}}$ определяется напряжением, при котором произошло разрушение.



Фиг. 6.

Пусть имеем, например, четырехступенчатый симметричный блок и кривые повреждаемости \bar{F}_n по τ (или \bar{F}_n по $\tau = \frac{\tau}{\tau_p}$) при различных уровнях гармонической нагрузки (фиг. 6).

Откладывая последовательно продолжительности различных уровней блока t_v на соответствующих кривых повреждаемости, получаем значения $\Delta\bar{F}_n$. Переход с одной кривой на другую происходит при $\bar{F}_n = \text{const}$. Разрушение образца произойдет в момент, когда поврежденная площадь достигает значения $\bar{F}_n^{\text{разр}}$ при соответствующем ему напряжении (например, при $\bar{F}_{n2}^{\text{разр}}$ и σ_2 , фиг. 6).

Время распространения трещины до разрушения и долговечность равны:

$$\tau_p = \sum_v t_v, \quad T = \tau_0 + \tau_p.$$

Время τ_0 определяется по формулам (3) и (4).

Если воспользоваться аппроксимацией кривых повреждаемости

$\bar{F}_n = f(\tau, \sigma)$, то τ_p и $\bar{F}_n^{\text{разр}}$ можно определить из следующих выражений (фиг. 6):

$$\tau_p = \sum_{v=1}^{v_{\text{разр}}} t_v; \quad \Delta t_v = - \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\partial \bar{F}_n / \partial \sigma}{\partial \bar{F}_n / \partial \tau} d\sigma,$$

$$\bar{F}_n^{\text{разр}} = \sum_{v=1}^{v_{\text{разр}}} \int_{\tau_{v-1} + \Sigma \Delta t_v}^{\tau_v + \Sigma \Delta t_v} \frac{\partial \bar{F}_n}{\partial \tau} d\tau.$$

Существенное ускорение определения долговечности может быть получено путем замены блока программной нагрузки эквивалентной гармонической нагрузкой, продолжительностью t_δ . Под эквивалентной гармонической нагрузкой будем понимать гармоническую нагрузку, при которой за одинаковое время имеют место одинаковые повреждения с рассматриваемой программной нагрузкой.

Закономерности накопления повреждений на 1-й и 2-й стадиях усталостного разрушения различны. Время появления первой макротрещины, согласно изложенным выше представлениям, не зависит от последовательности приложения напряжений, тогда как время распространения трещины зависит от нее. Поэтому понятие о гармонической нагрузке, эквивалентной данной программной (случайной), будем относить либо к одной стадии усталостного разрушения, либо к общей долговечности.

Обозначим:

$\sigma_{\text{экр}}^0$ — напряжение гармонического цикла, эквивалентное рассматриваемой программной (случайной) нагрузке по времени появления трещины;

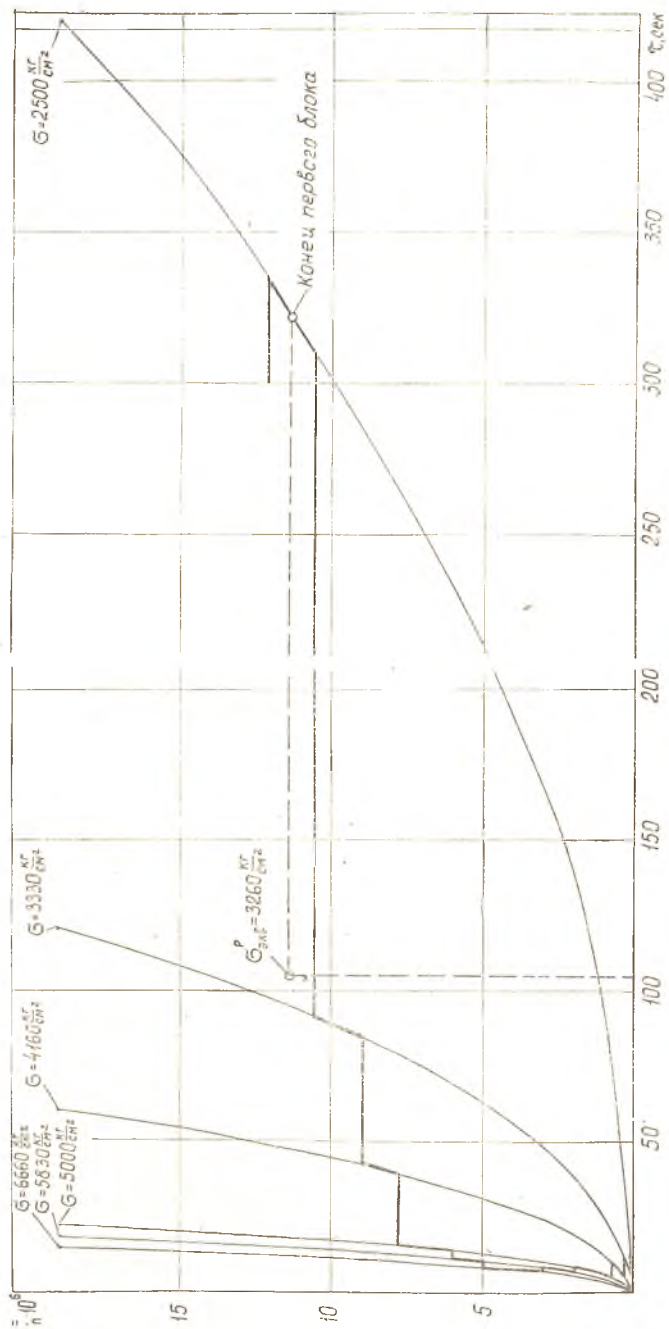
$\sigma_{\text{экр}}^p$ — то же, но по времени распространения трещины;

$\sigma_{\text{экр}}^T$ — то же, но по общей долговечности.

Учитывая, что блок сформирован на основе представительного участка случайной нагрузки и имея в виду периодичность программной нагрузки, можем утверждать, что если имеет место эквивалентность гармонической и программной нагрузок на интервале t_δ , то повреждение, вызванное k блоками продолжительностью kt_δ равно повреждению гармонической нагрузкой, продолжительностью kt_δ и интенсивностью $\sigma_{\text{экр}}$.

На этом основании время распространения трещины τ_p при программной нагрузке может быть определено как время распространения трещины при гармонической нагрузке интенсивностью $\sigma_{\text{экр}}^p$. Тогда, определяя поврежденную площадь $\bar{F}_{\text{пл}}$ за один блок (или $\bar{F}_{\text{пл}k}$ за k блоков), так, как это показано на фиг. 6, или аналитическим путем (при наличии аппроксимированных выражений кривых повреждаемости), находим значение $\sigma_{\text{экр}}^p$ интерполяцией.

На фиг. 7 показано определение $\sigma_{\text{экр}}^p$ для программной нагрузки, изображенной на фиг. 1, с параметрами, приведенными в таб-



Фиг. 7.

лице 1 при значении номинальных напряжений 8-й и 9-й ступеней $\sigma_{\max} = 6660 \text{ кг/см}^2$. Начальные участки кривых повреждаемости для соответствующих уровней гармонической нагрузки построены по результатам вычислений, выполненных на ЭВМ с помощью формул, приведенных в работе [3]. Получено значение $\sigma_{\text{ЭКВ}}^P = 3260 \text{ кг/см}^2$.

По формулам (3) и (4) для рассмотренной программной нагрузки получено значение гармонической нагрузки, эквивалентной по моменту возникновения трещины, $\sigma_{\text{ЭКВ}}^0 = 3200 \text{ кг/см}^2$.

В заключение заметим, что можно получить напряжение $\sigma_{\text{ЭКВ}}^T$ при гармонической нагрузке, эквивалентной данной программной по общей долговечности T (не соблюдая эквивалентности этой нагрузки раздельно по стадиям усталостного разрушения).

Имея значение $\sigma_{\text{ЭКВ}}^P$ и соответствующее ему время τ_p , полученное из кривых повреждаемости при гармонической нагрузке, а также значение τ_0 , определенное по формулам (3) и (4), находим $T = \tau_0 + \tau_p$, а по кривой усталости для гармонической нагрузки определяем $\sigma_{\text{ЭКВ}}^T$ — напряжение гармонического цикла, эквивалентное данной программной нагрузке по общей долговечности.

Для определенных выше эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{ЭКВ}}^P$ и $\sigma_{\text{ЭКВ}}^0$ имеем: $\tau_p = 600 \text{ мин}$, $\tau_0 = 225 \text{ мин}$, $T = 825 \text{ мин}$ и $\sigma_{\text{ЭКВ}}^T = 3210 \text{ кг/см}^2$.

Таким образом, $\sigma_{\text{ЭКВ}}^0 < \sigma_{\text{ЭКВ}}^T < \sigma_{\text{ЭКВ}}^P$.

Значения τ_0 , τ_p и T для программной нагрузки, полученные расчетом (методом эквивалентных гармоник) и экспериментальным путем, даны в таблице 2.

Таблица 2

	$\tau_0, \text{ мин}$	$\tau_p, \text{ мин}$	$T, \text{ мин}$
Расчетные значения	225	600	825
Эксперимент	216	864	1080

Экспериментальные данные приведены для вероятности $P = 50\%$, что позволяет считать совпадение их с расчетными удовлетворительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. Несущая способность и расчеты деталей машины на прочность. Машгиз, 1963.
2. Дж. Ковалевский. О соотношении между усталостной долговечностью при повторных нагрузках со случайным чередованием амплитуд и при соответствующих программных нагрузках. Сборник «Усталостная прочность и долговечность самолетных конструкций», Машиностроение, 1965.
3. А. С. Мостовой. Определение долговечности образца на основе некоторых представлений о механизме усталостного разрушения. Труды КуАИ, вып. XXXIX, 1968.

4. А. С. Мостовой. Теоретическое определение долговечности образца. Материалы всесоюзного научно-технического совещания по проблеме прочности, надежности и усталостной долговечности авиационных конструкций, Киев, 1969.

5. А. С. Мостовой, Э. И. Миноранский. Расчет кривой усталости по трещине для образца при программной и случайной нагрузках. Труды КуАИ, вып. XXXIX, 1968.

6. Ю. С. Урбанский. Метод форсирования усталостных испытаний при программном нагружении. Сборник «Прочность и долговечность авиационных конструкций», вып. II, Киев, 1965.