

РАСЧЕТ КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

r — радиус осевой линии кольца, проходящей через центры тяжести поперечных сечений; φ — угловая координата точки осевой линии кольца; x, y, z — подвижная правая прямоугольная система осей координат (начало координат на осевой линии кольца, ось x направлена перпендикулярно плоскости кольца, ось y — по касательной к осевой линии в сторону возрастания угла φ , ось z — по радиусу от центра кольца); u, v, w — проекции перемещения точки осевой линии на оси x, y, z ; Θ — угол поворота поперечного сечения кольца; p_x, p_y, p_z — проекции вектора распределенной нагрузки, отнесенной к единице длины осевой линии, на оси x, y, z ; m_x, m_y, m_z — проекции вектора распределенного момента, отнесенного к единице длины осевой линии, на оси x, y, z ; Q_x, Q_z, N — сдвигающие и нормальная силы в сечении кольца; M_x, M_z, M_y — изгибающие и крутящий моменты в сечении кольца; F — площадь сечения кольца; I_x, I_z, I_{zx} — моменты инерции поперечного сечения кольца; E — модуль упругости материала кольца; $B = EF, B_x = EI_x, B_z = EI_z, B_{zx} = EI_{zx}, C$ — жесткость сечения кольца на кручение;

$$\alpha = \frac{B_{zx}}{B_x}; \quad \beta = \frac{B_{zx}}{B_z}; \quad \kappa = \frac{B_z}{C};$$

$$\nu = \frac{B_x}{r^2 B}; \quad \lambda = 1 - \alpha \beta \frac{\kappa}{\kappa + 1}.$$

Принятая система координат, а также положительные направления усилий моментов и перемещений показаны на рис. 1.

1. Рассмотрим тонкое круговое кольцо постоянного сечения, нагруженное некоторой заданной системой сил и моментов (распределенных или сосредоточенных). Расположение главных осей инерции ξ, η поперечного сечения кольца будем предполагать произвольным (рис. 2).

Для определения перемещений кольца, а также внутренних усилий и моментов воспользуемся дифференциальными уравнениями

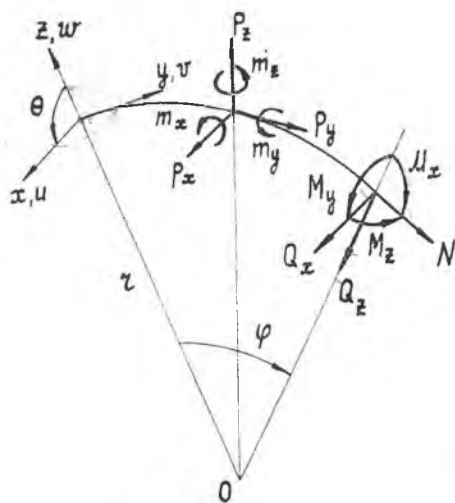


Рис. 1.

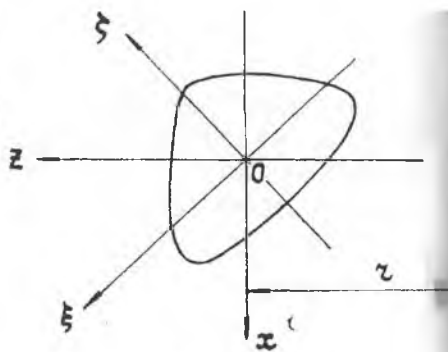


Рис. 2.

равновесия бесконечно малого элемента кругового стержня и зависимостями между M_x, M_y, M_z, N и перемещениями u, v, w, Θ [1]:

$$Q_x' + r p_x = 0; \quad (1)$$

$$M_y' + M_z + r m_y = 0; \quad (2)$$

$$M_z' - M_y - r Q_x + r m_z = 0; \quad (3)$$

$$N' - Q_z + r p_y = 0; \quad (4)$$

$$Q_z' + N - r p_z = 0; \quad (5)$$

$$M_x' + r Q_z - r m_x = 0; \quad (6)$$

$$M_x = \frac{B_x}{r^2} (v' - w'') - \frac{B_{zx}}{r^2} (u'' + r\theta); \quad M_y = \frac{C}{r^2} (r\theta' - u'); \quad (7)$$

$$M_z = -\frac{B_z}{r^2} (u'' + r\theta) + \frac{B_{zx}}{r^2} (v' - w''); \quad N = \frac{B}{r} (v' + w).$$

Здесь штрих означает производную по углу φ .

Выражения (1) — (7) образуют систему десяти уравнений относительно десяти неизвестных $Q_x, N, Q_z, M_x, M_y, M_z, u, v, w$ и Θ , решение которой полностью определяет напряженное и деформированное состояние кольца (или кругового стержня) под действием заданной нагрузки.

После некоторых элементарных преобразований решение уравнений (1) — (7) может быть сведено к интегрированию следующей системы трех уравнений относительно перемещений u, v, w :

$$u^{VI} + 2u^{IV} + u'' = \frac{1}{1-\alpha\beta} \frac{r^3}{B_z} (rp_x + m_y + m_z)'' - \frac{\alpha r^3}{B_z} (rp_x + m_y + m_z)' + \frac{\alpha r^3}{B_z} (m_y'' + m_y) - \frac{\beta}{1-\alpha\beta} \frac{r^3}{B_x} [r(p_y + p_z)' - (m_x'' + m_x)']; \quad (8)$$

$$v^{VI} + 2v^{IV} + v'' = -\frac{1}{1-\alpha\beta} \frac{r^3}{B_x} [r(p_y + p_z) - (m_x'' + m_x)] - \frac{r^2}{B} (p_y' - p_z)''' + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \frac{r^3}{B_z} (rp_x + m_y + m_z)'; \quad (9)$$

$$w'' + w = -\frac{r^2}{B} (p_y' - p_z) - (v'' + v)'. \quad (10)$$

Для угла поворота θ сечения кольца при этом будем иметь

$$\theta = -\frac{u^{IV} + (\alpha + 2)u''}{(\alpha + 1)r} + \frac{r^2}{(\alpha + 1)B_z} (rp_x + m_y + m_z)' + \frac{\alpha r^2}{(\alpha + 1)B_z} m_y + \frac{\beta}{(\alpha + 1)r} [(v - w)'' + (\alpha + 1)(v - w)']. \quad (11)$$

Определив из соотношений (8) — (11) перемещения u , v , w и θ , можно затем получить выражения для усилий и моментов в произвольном сечении кольца.

2. Запишем вообще решение уравнений (8) — (10)

$$u = A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + A_5 \varphi + A_6 + u^*; \quad (12)$$

$$v = B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi + B_3 \varphi \cos \varphi + B_4 \varphi \sin \varphi + B_5 \varphi + B_6 + v^*; \quad (13)$$

$$w = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + B_3 \varphi \sin \varphi - B_4 \varphi \cos \varphi - B_5 + w^*. \quad (14)$$

Здесь A_i , B_i , C_i — произвольные постоянные; u^* , v^* , w^* — частные решения, определяемые распределенными нагрузками p_x , ..., m_z .

Выражения (12) — (14) совместно с (11) позволяют по (7) вычислить моменты M_x , M_y , M_z и нормальную силу N . Поперечные силы найдутся из уравнений равновесия (3) и (6):

$$Q_x = \frac{M_z' - M_y}{r} + m_z; \quad (15)$$

$$Q_z = -\frac{M_x'}{r} + m_x. \quad (16)$$

3. Рассмотрим частный случай нагружения кольца одними только сосредоточенными силами и моментами.

В этом случае для каждой из частей, на которые кольцо разделяется двумя ближайшими точками приложения сосредоточенных

нагрузок, можно записать выражения вида (12) — (14) с соответствующими произвольными постоянными, полагая

$$u^* = v^* = w^* = 0.$$

В эти выражения войдут 14 постоянных A_1, \dots, B_6, C_1 и C_2 . Так как число независимых постоянных не может превышать 12 (по числу 12 граничных условий, которые можно записать для рассматриваемой части кольца), то они должны удовлетворять двум определенным соотношениям. Для установления этих соотношений выражения для M_x и N , найденные по (12) — (14) и (7), подставим в уравнение

$$M_x' + rN' = 0,$$

которое следует из (4) и (6) при $p_y = 0$; $m_x = 0$.

В результате получим, что

$$\begin{aligned} C_1 &= B_2 - \frac{1 - \lambda\nu}{1 + \lambda\nu} B_4 - \frac{2\alpha\nu}{(\alpha + 1)(1 + \lambda\nu)} A_3, \\ C_2 &= -B_1 - \frac{1 - \lambda\nu}{1 + \lambda\nu} B_3 + \frac{2\alpha\nu}{(\alpha + 1)(1 + \lambda\nu)} A_4. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом этих зависимостей в конечном итоге можно прийти к следующим формулам для усилий и моментов в произвольном сечении рассматриваемой части кольца:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{B_z}{\alpha r^3} A_5, \\ N &= \frac{2B_x}{(1 + \lambda\nu)r^3} \left[\left(\lambda B_3 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} A_4 \right) \cos \varphi + \left(\lambda B_4 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} A_3 \right) \sin \varphi \right] \\ Q_z &= -\frac{2B_x}{(1 + \lambda\nu)r^3} \left[\left(\lambda B_3 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} A_4 \right) \sin \varphi - \left(\lambda B_4 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} A_3 \right) \cos \varphi \right]; \\ M_x &= -\frac{2B_x}{(1 + \lambda\nu)r^2} \left[\left(\lambda B_3 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} A_4 \right) \cos \varphi + \left(\lambda B_4 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} A_3 \right) \sin \varphi \right] + \\ &\quad + \frac{B_x}{r^2} (1 - \alpha\beta) B_5, \\ M_y &= \frac{2B_z}{(\alpha + 1)r^2} \left[\frac{1 + \nu(1 - \alpha\beta)}{1 + \lambda\nu} A_3 - \frac{\beta}{1 + \lambda\nu} B_4 \right] \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{2B_z}{(\alpha + 1)r^2} \left[\frac{1 + \nu(1 - \alpha\beta)}{1 + \lambda\nu} A_4 + \frac{\beta}{1 + \lambda\nu} B_3 \right] \sin \varphi - \frac{B_z}{\alpha r^2} A_5; \\ M_z &= \frac{2B_z}{(\alpha + 1)r^2} \left[\frac{1 + \nu(1 - \alpha\beta)}{1 + \lambda\nu} A_3 - \frac{\beta}{1 + \lambda\nu} B_4 \right] \sin \varphi - \\ &\quad - \frac{2B_z}{(\alpha + 1)r^2} \left[\frac{1 + \nu(1 - \alpha\beta)}{1 + \lambda\nu} A_4 + \frac{\beta}{1 + \lambda\nu} B_3 \right] \cos \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Угол поворота поперечного сечения кольца равен

$$\Theta = \frac{1}{r} \left[A_1 + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \frac{1+\nu(1-\alpha\beta)}{1+\lambda\nu} A_3 - \frac{2\beta\alpha}{(\alpha+1)(1+\lambda\nu)} B_4 \right] \sin \varphi + \\ + \frac{1}{r} \left[A_2 - \frac{2\alpha}{\alpha+1} \frac{1+\nu(1-\alpha\beta)}{1+\lambda\nu} A_4 - \frac{2\beta\alpha}{(\alpha+1)(1+\lambda\nu)} B_3 \right] \cos \varphi + \\ + \frac{1}{r} (A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + \beta B_5). \quad (19)$$

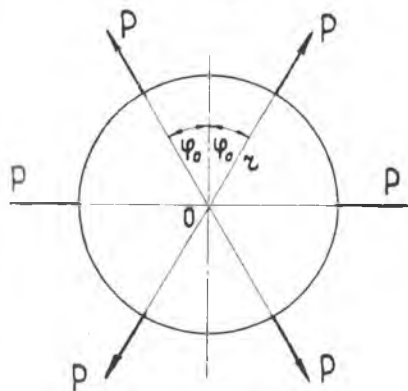


Рис. 3.

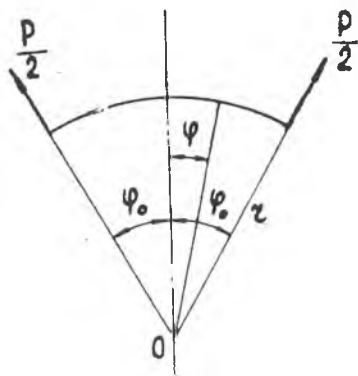


Рис. 4.

Произвольные постоянные определяются из условий сопряжения рассматриваемой части кольца с прилегающими частями.

4. В качестве примера рассмотрим кольцо, нагруженное m радиальными силами P , точки приложения которых делят его осевую линию на равные части с центральным углом (рис. 3)

$$2\varphi_0 = \frac{2\pi}{m}.$$

Очевидно, что для определения деформаций и напряжений в кольце достаточно рассмотреть одну его часть, ограниченную двумя соседними силами P (рис. 4).

Из условий симметрии следует, что

$$A_1 = A_3 = A_5 = 0; \quad B_2 = B_4 = B_6 = 0. \quad (20)$$

Далее для сечения $\varphi = \varphi_0$ имеем:

$$Q_z(\varphi_0) = -\frac{P}{2}; \quad M_y(\varphi_0) = 0; \quad (21)$$

$$u'(\varphi_0) = 0; \quad v(\varphi_0) = 0; \quad w'(\varphi_0) = 0. \quad (22)$$

Эти условия приведут нас к следующим выражениям для сил, моментов и перемещений v и w :

$$N = \frac{P}{2 \sin \varphi_0} \cos \varphi; \quad Q_z = -\frac{P}{2 \sin \varphi_0} \sin \varphi,$$

$$M_x = \frac{Pr}{2 \sin \varphi_0} \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi \right); \quad (23)$$

$$v = - \frac{Pr^3}{4(1-\alpha\beta) B_x \sin \varphi_0} \left[(2 + \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0) \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{2 \sin \varphi_0}{\varphi_0} \varphi \right];$$

$$w = \frac{Pr^3}{4(1-\alpha\beta) B_x \sin \varphi_0} \left[(1 + \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0) \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{2 \sin \varphi_0}{\varphi_0} \right]. \quad (24)$$

При выводе этих зависимостей мы приняли $v=0$, т. е. предположили нерастяжимость осевой линии кольца.

Для определения перемещений u к условиям (22) необходимо добавить еще одно, определяющее перемещение кольца как твердого тела в направлении оси x . Так, полагая $u(0) = 0$, получим

$$u = \frac{3Pr^3}{4(1-\alpha\beta) B_x \sin \varphi_0} [1 + \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0] (1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi]. \quad (25)$$

Угол поворота произвольного сечения кольца будет равен

$$\Theta = - \frac{\beta Pr^2}{4(1-\alpha\beta) B_x \sin \varphi_0} \left[(1 + \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0) \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{2 \sin \varphi_0}{\varphi_0} \right]. \quad (26)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Машигиз, 1959.

