КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

И. С. Ахмедьянов

РАСЧЕТ КРУГОВОГО КОЛЬЦА НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ ПРОСТРАНСТВЕННУЮ НАГРУЗКУ

В настоящей статье рассматривается способ расчета плоског кругового кольца постоянного сечения на действие произвольной пространственной нагрузки. Способ основан на использовании ре- шений дифференциальных уравнений для перемещений точек осе- вой линии кольца, полученных с учетом ее растяжимости.

Принятые обозначения

r — радиус осевой линии кольца;
φ — угловая координата точки осевой линии кольца;
x, y, z — подвижная прямоугольная система координат (начало координа на осевой линии кольца, ось x направлена перпендикулярно плос кости кольца, ось y — по касательной к осевой линии в сторон возрастания угла φ, ось z — по радиусу от центра кольца);
u, v, w — проекции полного перемещения точки осевой линии на оси x, y,
Θ — угол поворота сечения кольца;
p_x, p_y, p_z — проекции вектора распределенной нагрузки, отнесенной к едини длины осевой линии, на оси x, y, z;
m_x, m_y, m_z — проекции вектора распределенного момента, отнесенного к едини длины осевой линии, на оси x, y, z;
Q_x, Q_z — перерезывающие силы в сечении кольца;
N — продольная сила;
M_x, M_z — изгибающие моменты в сечении кольца;
M_y — крутящий момент;
B — жесткость сечения кольца на растяжение;
B_x, B_z — жесткости сечения кольца на изгиб (относительно осей x и z);
C — жесткость сечения кольца на кручение.

Оси x и z предполагаются главными центральными осям инерции поперечного сечения кольца.

Основные уравнения для расчета кругового кольца на произвольную пространственную нагрузку

1. Рассмотрим круговое кольцо постоянного сечения, нагруженное произвольной системой сосредоточенных сил и моментов. Предположим, что размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом осевой линии. Для определения деформаций кольца, а также внутренних усилий и моментов воспользуемся дифференциальными уравнениями равновесия элемента кольца, записанными для недеформированного состояния (считаем деформации кольца весьма малыми), и известными зависимостями между N, M_x, M_y, M_z и перемещениями u, v, w, Θ [1]:

$$Q_x' + rp_x = 0, \tag{1}$$

$$M_y' + M_z + rm_y = 0, \tag{2}$$

$$M_z' - M_y - rQ_x + rm_z = 0, \tag{3}$$

$$N' - Q_z + rp_y = 0, \tag{4}$$

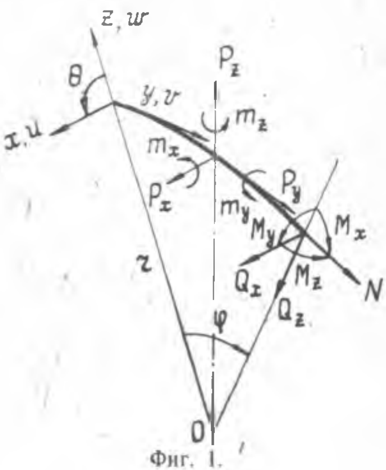
$$Q_z' + N - rp_z = 0, \tag{5}$$

$$M_x' + rQ_z - rm_x = 0, \tag{6}$$

$$N = \frac{B}{r}(v' + w), \quad M_x = \frac{B_x}{r^2}(v' - w''), \tag{7}$$

$$M_y = \frac{C}{r^2}(r\Theta' - u'), \quad M_z = -\frac{B_z}{r^2}(u'' + r\Theta). \tag{8}$$

Штрих означает производную по углу φ. Принятая система координат, а также положительные направления усилий, моментов и перемещений показаны на фиг. 1.



Фиг. 1.

Уравнения (1)—(8) представляют собой совокупность 10 уравнений относительно 10 неизвестных Q_x, N, Q_z, M_x, M_y, M_z, u, v, w и Θ. Эта система уравнений разделяется на две независимые системы. Первая система, состоящая из уравнений (1)—(3) и (8), определяет деформации кольца «из плоскости», а вторая система из уравнений (4)—(7) — деформации кольца в его плоскости.

2. Решение уравнений (1)—(8) может быть сведено к интегрирова-

нию следующей системы трех уравнений относительно трех компонентов перемещения u, v, w:

$$u^{\mathrm{VI}} + 2u^{\mathrm{IV}} + u'' = \frac{r^4}{B_z}(p_x'' - \varkappa p_x) + + \frac{(\varkappa+1) r^3}{B_z} m_y'' + \frac{r^3}{B_z}(m_z''' - \varkappa m_z'), \tag{9}$$

$$v^{\mathrm{VI}} + 2v^{\mathrm{IV}} + v'' = -\frac{r^4}{B_x}(\nu p_y^{\mathrm{IV}} + p_y) + + \frac{r^4}{B_x}(\nu p_z''' - p_z') + \frac{r^3}{B_x}(m_x'' + m_x), \tag{10}$$

$$w'' + w = \frac{r^2}{B}(p_z - p_y') - v''' - v'. \tag{11}$$

Здесь

$$\varkappa = \frac{B_z}{C}, \quad \nu = \frac{B_x}{r^2 B}. \tag{12}$$

Угол поворота сечения кольца Θ найдется при этом из соотношения

$$\Theta = -\frac{1}{(\varkappa+1) r}\left[u^{\mathrm{IV}} + (\varkappa+2) u''\right] + \frac{r^2}{(\varkappa+1) B_z}\left[r p_x + (\varkappa+1) m_y + m_z'\right]. \tag{13}$$

Определив из уравнений (9)—(11) и (13) перемещения u, v, w и Θ, можно вычислить все усилия и моменты в сечениях кольца.

Расчет кольца при симметричном нагружении

Применим приведенные выше уравнения для определения деформаций, внутренних усилий и моментов, возникающих в кольце при симметричном нагружении. Не нарушая общности, можно считать, что нагрузка симметрична, например, относительно сечения $\varphi=0$. Пусть нагрузка представляет собой ряд сосредоточенных сил и моментов, приложенных в некоторых заданных точках оси кольца и находящихся в равновесии с распределенными силами p_x, p_y, p_z и моментами m_x, m_y, m_z:

$$p_x = \sum_{n=0}^{\infty} p_{xn} \cos n\varphi, \quad p_y = \sum_{n=1}^{\infty} p_{yn} \sin n\varphi, \quad p_z = \sum_{n=0}^{\infty} p_{zn} \cos n\varphi, \tag{14}$$

$$m_x = \sum_{n=1}^{\infty} m_{xn} \sin n\varphi, \quad m_y = \sum_{n=0}^{\infty} m_{yn} \cos n\varphi, \quad m_z = \sum_{n=1}^{\infty} m_{zn} \sin n\varphi. \tag{15}$$

Обратимся к интегрированию уравнений (9)—(11) применительно к рассматриваемому случаю нагружения кольца.

Начнем с уравнения (9). Подставляя сюда вместо p_x, m_y и m_z их выражения из (14) и (15), получим

$$u^{\mathrm{VI}} + 2u^{\mathrm{IV}} + u'' = -\frac{\varkappa r^4}{B_z} p_{x0} - \frac{(\varkappa+1) r^3}{B_z} (r p_{x1} + m_{y1} + m_{z1}) \cos\varphi -$$

$$- \frac{r^3}{B_z} \sum_{n=2}^{\infty} [(\varkappa + n^2) r p_{xn} + n^2 (\varkappa+1) m_{yn} + n (\varkappa + n^2) m_{zn}] \cos n\varphi. \quad (16)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$u = A_1 \sin\varphi + A_2 \cos\varphi + A_3 \varphi \cos\varphi + A_4 \varphi \sin\varphi + A_5 \varphi + A_6 -$$

$$- \frac{\varkappa r^4 p_{x0}}{2B_z} \varphi^2 - \frac{(\varkappa+1) r^3}{8B_z} (r p_{x1} + m_{y1} + m_{z1}) \varphi^2 \cos\varphi +$$

$$+ \frac{r^3}{B_z} \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n r p_{xn} + \beta_n m_{yn} + \gamma_n m_{zn}) \cos n\varphi. \quad (17)$$

Здесь

$$\alpha_n = \frac{\varkappa + n^2}{n^2 (n^2-1)^2}, \quad \beta_n = \frac{\varkappa+1}{(n^2-1)^2}, \quad \gamma_n = \frac{\varkappa + n^2}{n (n^2-1)^2}, \quad (18)$$

$A_1, \ldots, A_6$ — произвольные постоянные.

Для определения угла поворота сечения кольца подставим в (13) выражения (17), (14) и (15). В результате получим

$$\Theta = \frac{1}{r} \left(A_1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} A_3\right) \sin\varphi + \frac{1}{r} \left(A_2 - \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} A_4\right) \cos\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r} (A_3 \varphi \cos\varphi + A_4 \varphi \sin\varphi) +$$

$$+ \frac{(\varkappa+1) r^3}{B_z} p_{x0} + \frac{r^2}{B_z} m_{y0} + \frac{\varkappa r^2}{(\varkappa+1) B_z} m_{y1} \cos\varphi +$$

$$+ \frac{\varkappa r^2}{4B_z} (r p_{x1} + m_{y1} + m_{z1}) \left(\frac{\varkappa-3}{\varkappa+1} \cos\varphi - 2\varphi \sin\varphi - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} \varphi^2 \cos\varphi\right) +$$

$$+ \frac{r^2}{B_z} \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_n r p_{xn} + \delta_n m_{yn} + \zeta_n m_{zn}) \cos n\varphi. \quad (19)$$

В этой формуле

$$\delta_n = \frac{1 + \varkappa n^2}{(n^2-1)^2}, \quad \zeta_n = \frac{n (\varkappa+1)}{(n^2-1)^2}. \quad (20)$$

Найдя перемещение u и угол поворота Θ, можно воспользовавшись формулами (8), определить моменты M_y и M_z:

$$M_y = \frac{2B_z}{(\varkappa+1) r^2} (A_3 \cos\varphi + A_4 \sin\varphi) - \frac{B_z}{\varkappa r^2} A_5 + r^2 p_{x0} \varphi -$$

$$-\frac{r}{\varkappa+1}m_{y1}\sin\varphi-\frac{r}{4}(rp_{x1}+m_{y1}+m_{z1})\left(\frac{3\varkappa-1}{\varkappa+1}\sin\varphi+2\varphi\cos\varphi\right)-$$

$$-r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{rp_{xn}+n^2m_{yn}+nm_{zn}}{n(n^2-1)}\sin n\varphi, \tag{21}$$

$$M_z=\frac{2B_z}{(\varkappa+1)r^2}(A_3\sin\varphi-A_4\cos\varphi)-r^2p_{x0}-rm_{y0}-$$

$$-\frac{\varkappa r}{\varkappa+1}m_{y1}\cos\varphi+\frac{r}{4}(rp_{x1}+m_{y1}+m_{z1})\left(\frac{5\varkappa+1}{\varkappa+1}\cos\varphi-2\varphi\sin\varphi\right)+$$

$$+r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{rp_{xn}+m_{yn}+nm_{zn}}{n^2-1}\cos n\varphi. \tag{22}$$

Перерезывающую силу Q_x найдем из уравнения (3) по (21) (22) и (15):

$$Q_x=\frac{B_z}{\varkappa r^3}A_5-rp_{x0}\varphi-r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{xn}}{n}\sin n\varphi. \tag{23}$$

2. Обратимся теперь к уравнению (10). В рассматриваемом случае нагружения кольца оно примет вид

$$v^{\mathrm{VI}}+2v^{\mathrm{IV}}+v''=-\frac{(1+\nu)r^4}{B_x}(p_{y1}-p_{z1})\sin\varphi-$$

$$-\frac{r^3}{B_x}\sum_{n=2}^{\infty}[(1+\nu n^4)rp_{yn}-n(1+\nu n^2)rp_{zn}+(n^2-1)m_{xn}]\sin n\varphi \tag{24}$$

и будет иметь следующее общее решение:

$$v=B_1\sin\varphi+B_2\cos\varphi+B_3\varphi\cos\varphi+B_4\varphi\sin\varphi+$$

$$+B_5\varphi+B_6-\frac{(1+\nu)r^4}{8B_x}(p_{y1}-p_{z1})\varphi^2\sin\varphi+$$

$$+\frac{r^3}{B_x}\sum_{n=2}^{\infty}(\eta_nrp_{yn}-\lambda_nrp_{zn}+\mu_nm_{xn})\sin n\varphi. \tag{25}$$

Здесь

$$\eta_n=\frac{1+\nu n^4}{n^2(n^2-1)^2},\quad \lambda_n=\frac{1+\nu n^2}{n(n^2-1)^2},\quad \mu_n=\frac{1}{n^2(n^2-1)}. \tag{26}$$

$B_1, \ldots, B_6$ — произвольные постоянные.

3. На основании (25) и (14) уравнение (11) для радиального перемещения w запишется в виде

$$w''+w=2B_3\cos\varphi+2B_4\sin\varphi-B_5+\frac{\nu r^4}{B_x}p_{z0}+$$

$$+\frac{(3-\nu)r^4}{4B_x}(p_{y1}-p_{z1})\cos\varphi-\frac{(1+\nu)r^4}{2B_x}(p_{y1}-p_{z1})\varphi\sin\varphi+$$

$$+\frac{r^3}{B_x}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1+\nu n^2}{n(n^2-1)}rp_{yn}-\frac{1+\nu}{n^2-1}rp_{zn}+\frac{m_{xn}}{n}\right]\cos n\varphi. \tag{27}$$

Общим решением этого уравнения будет

$$w = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi + B_3 \varphi \sin\varphi - B_4 \varphi \cos\varphi - B_5 + \frac{\nu r_4}{B_x} p_{z0} +$$

$$+ \frac{(1-\nu) r^4}{4B_x} (p_{y1} - p_{z1}) \varphi \sin\varphi + \frac{(1+\nu) r^4}{8B_x} (p_{y1} - p_{z1}) \varphi^2 \cos\varphi +$$

$$+ \frac{r^3}{B_x} \sum_{n=2}^{\infty} (-\lambda_n r p_{yn} + \nu_n r p_{zn} - \xi_n m_{xn}) \cos n\varphi. \qquad (28)$$

Здесь

$$\nu_n = \frac{1+\nu}{(n^2-1)^2}, \quad \xi_n = \frac{1}{n(n^2-1)}, \qquad (29)$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. В выражения (25) и (28) для перемещений v и w входят 8 постоянных ($B_1, \ldots, B_6$, C_1 и C_2). Так как число независимых постоянных не может быть более 6, то $B_1, \ldots, B_6$, C_1 и C_2 должны удовлетворять двум определенным соотношениям. Для установления этих соотношений найдем по формулам (7) выражения для продольной силы N и изгибающего момента M_x, исходя из (25) и (28). Подставляя эти выражения в уравнение равновесия

$$M_x' + rN' = -r^2 p_y + r m_x,$$

которое следует из (4) и (6), легко находим, что

$$C_1 = B_2 - \frac{1-\nu}{1+\nu} B_4, \qquad (30)$$

$$C_2 = -B_1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} B_3 + \frac{\nu(3-\nu) r^4}{4(1+\nu) B_x} (p_{y1} - p_{z1}) +$$

$$+ \frac{\nu r^3}{(1+\nu) B_x} (r p_{y1} - m_{x1}). \qquad (31)$$

5. Установив соотношения (30) — (31), по (25), (28) и (7) получаем следующие формулы для вычисления N и M_x:

$$N = \frac{2B_x}{(1+\nu) r^3} (B_3 \cos\varphi + B_4 \sin\varphi) + r p_{z0} +$$

$$+ \frac{1}{1+\nu} (r p_{y1} - m_{x1}) \cos\varphi + \frac{r}{4} (p_{y1} - p_{z1}) \left(\frac{3-\nu}{1+\nu} \cos\varphi - 2\varphi \sin\varphi \right) +$$

$$+ r \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n p_{yn} - p_{zn}}{n^2 - 1} \cos n\varphi. \qquad (32)$$

$$M_x = -\frac{2B_x}{(1+\nu) r^2} (B_3 \cos\varphi + B_4 \sin\varphi) + \frac{B_x}{r^2} B_5 +$$

$$+ \frac{\nu r}{1+\nu} (r p_{y1} - m_{x1}) \cos\varphi - \frac{r^2}{4} (p_{y1} - p_{z1}) \left(\frac{3-\nu}{1+\nu} \cos\varphi - 2\varphi \sin\varphi \right) -$$

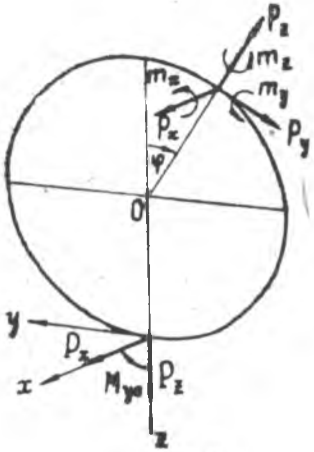
$$- r \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r p_{yn} - n r p_{zn} + (n^2-1) m_{xn}}{n(n^2-1)} \cos n\varphi. \qquad (33)$$

Перерезывающую силу Q_z найдем из уравнения (6) по (33) и (15):

$$Q = -\frac{2B_x}{(1+\nu)r^3}(B_3 \sin\varphi - B_4\cos\varphi) + m_{x1}\sin\varphi +$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}(rp_{y1} - m_{x1})\sin\varphi - \frac{r}{4}(p_{y1} - p_{z1})\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi\right) -$$

$$-r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_{yn} - np_{zn}}{n^2-1}\sin n\varphi. \qquad (34)$$



Фиг. 2

6. В качестве примера рассмотрим кольцо, к которому в сечении $\varphi = \pi$ приложены сосредоточенные силы P_x, P_z и крутящий момент M_{yo} (фиг. 2), уравновешенные распределенными силами (14) и моментами (15). В этом случае произвольные постоянные A_i и B_i могут быть определены сравнительно просто. Ввиду симметрии нагружения распределение величин u, w, Θ, N, M_x и M_z по контуру кольца будет описываться четными относительно φ функциями, а распределение v, Q_x и M_y — нечетными функциями. Поэтому в формулах (17), (19), (21)—(23) следует положить

$$A_1 = A_3 = A_5 = 0.$$

По той же причине в формулах (25), (28), (30)—(34) должно быть

$$B_2 = B_4 = B_6 = 0.$$

Остальные постоянные определяются из граничных условий. Для упрощения вычислений целесообразно вместо всей совокупности нагрузок (P_x, P_z и M_{yo}), приложенных к кольцу, рассмотреть каждую из них в отдельности и затем воспользоваться принципом наложения.

Начнем со случая, когда

$$P_x \neq 0, \quad P_z = 0, \quad M_{y0} = 0.$$

Из условий

$$u'(\pi) = 0, \quad v(\pi) = 0, \quad w'(\pi) = 0,$$

$$Q_x(\pi) = \frac{1}{2}P_x, \quad Q_z(\pi) = 0, \quad M_y(\pi) = 0$$

находим

$$p_{x0} = -\frac{1}{2\pi r} P_x, \quad r p_{x1} + m_{y1} + m_{z1} = \frac{1}{\pi} P_x, \quad p_{y1} - p_{z1} = 0,$$

$$A_4 = \frac{(3\varkappa + 1) r^3}{4\pi B_z} P_x, \quad B_3 = B_5 = 0.$$

Пусть теперь

$$P_x = 0, \quad P_z \neq 0, \quad M_{y0} = 0.$$

Тогда условия

$$u'(\pi) = 0, \quad v(\pi) = 0, \quad w'(\pi) = 0,$$

$$Q_x(\pi) = 0, \quad Q_z(\pi) = -\frac{1}{2} P_z, \quad M_y(\pi) = 0$$

позволяют получить

$$p_{x0} = 0, \quad r p_{x1} + m_{y1} + m_{z1} = 0, \quad p_{y1} - p_{z1} = -\frac{1}{\pi r} P_z,$$

$$A_4 = 0, \quad B_3 = B_5 = \frac{r^3}{2\pi B_x} P_z.$$

Если $P_x = 0$, $P_z = 0$, $M_{y0} \neq 0$, то используя условия

$$u'(\pi) = 0, \quad v(\pi) = 0, \quad w'(\pi) = 0,$$

$$Q_x(\pi) = 0, \quad Q_z(\pi) = 0, \quad M_y(\pi) = \frac{1}{2} M_{y0},$$

найдем

$$p_{x0} = 0, \quad r p_{x1} + m_{y1} + m_{z1} = \frac{1}{\pi r} M_{y0}, \quad p_{y1} - p_{z1} = 0,$$

$$A_4 = \frac{(\varkappa + 1) r^2}{4\pi B_z} M_{y0}, \quad B_3 = B_5 = 0.$$

Во всех трех рассмотренных случаях постоянные A_2, A_6 и B_1, соответствующие перемещению кольца как твердого тела, остаются неопределенными.

Расчет кольца на обратно симметричную нагрузку

1. При обратно симметричном нагружении распределенные силы p_x, p_y, p_z и моменты m_x, m_y, m_z можно представить так:

$$p_x = \sum_{n=1}^{\infty} p_{xn} \sin n\varphi, \quad p_y = \sum_{n=0}^{\infty} p_{yn} \cos n\varphi,$$

$$p_z = \sum_{n=1}^{\infty} p_{zn} \sin n\varphi, \tag{35}$$

$$m_x = \sum_{n=0}^{\infty} m_{xn} \cos n\varphi, \quad m_y = \sum_{n=1}^{\infty} m_{yn} \sin n\varphi,$$

$$m_z = \sum_{n=0}^{\infty} m_{zn} \cos n\varphi. \tag{36}$$

Тогда, в соответствии с (35) и (36), решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$u = A_1 \sin\varphi + A_2 \cos\varphi + A_3\varphi\cos\varphi + A_4\varphi\sin\varphi + A_5\varphi + A_6 -$$
$$- \frac{(\varkappa+1)\,r^3}{8B_z}(rp_{x1} + m_{y1} - m_{z1})\,\varphi^2 \sin\varphi +$$
$$+ \frac{r^3}{B_z}\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha_n r p_{xn} + \beta_n m_{yn} - \gamma_n m_{zn})\sin n\varphi. \quad (37)$$

Здесь $A_1, \ldots, A_6$ — произвольные постоянные; коэффициенты α_n, β_n и γ_n вычисляются по формулам (18).

Далее, по (13), (35), (36) и (37) получаем

$$\Theta = \frac{1}{r}\left(A_1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}A_3\right)\sin\varphi + \frac{1}{r}\left(A_2 - \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}A_4\right)\cos\varphi +$$
$$+ \frac{1}{r}(A_3\varphi\cos\varphi + A_4\varphi\sin\varphi) + \frac{\varkappa r^2}{(\varkappa+1)B_z}m_{y1}\sin\varphi +$$
$$+ \frac{\varkappa r^2}{4B_z}(rp_{x1} + m_{y1} - m_{z1})\left(\frac{\varkappa-3}{\varkappa+1}\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\varphi^2\sin\varphi\right) +$$
$$+ \frac{r^2}{B_z}\sum_{n=2}^{\infty}(\beta_n r p_{xn} + \delta_n m_{yn} - \zeta_n m_{zn})\sin n\varphi. \quad (38)$$

В этом выражении коэффициенты δ_n и ζ_n имеют вид, определяемый формулами (20).

Располагая выражениями (37) и (38) для u и Θ, по формулам (8) находим моменты M_y и M_z и, далее, по (3) и (36) — перерезывающую силу Q_x:

$$M_y = \frac{2B_z}{(\varkappa+1)\,r^2}(A_3\cos\varphi + A_4\sin\varphi) - \frac{B_z}{\varkappa r^2}A_5 +$$
$$+ \frac{r}{\varkappa+1}m_{y1}\cos\varphi + \frac{r}{4}(rp_{x1} + m_{y1} - m_{z1})\left(\frac{3\varkappa-1}{\varkappa+1}\cos\varphi - 2\varphi\sin\varphi\right) +$$
$$+ r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{rp_{xn} + n^2 m_{yn} - n m_{zn}}{n(n^2-1)}\cos n\varphi, \quad (39)$$

$$M_z = \frac{2B_z}{(\varkappa+1)\,r^2}(A_2\sin\varphi - A_4\cos\varphi) - \frac{\varkappa r}{\varkappa+1}m_{y1}\sin\varphi +$$
$$+ \frac{r}{4}(rp_{x1} + m_{y1} - m_{z1})\left(\frac{5\varkappa+1}{\varkappa+1}\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi\right) +$$
$$+ r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{rp_{xn} + m_{yn} - n m_{zn}}{n^2-1}\sin n\varphi, \quad (40)$$

$$Q_x = \frac{B_z}{\varkappa r^3}A_5 + m_{z0} + r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{xn}}{n}\cos n\varphi. \quad (41)$$

2. Обратившись к уравнению (10), исходя из (35) и (36), находим его общее решение:

$$v = B_1 \sin\varphi + B_2 \cos\varphi + B_3 \varphi\cos\varphi + B_4\varphi\sin\varphi + B_5\varphi + B_6 -$$

$$-\frac{r^3}{2B_x}(rp_{y0} - m_{x0})\varphi^2 - \frac{(1+\nu)r^4}{8B_x}(p_{y1}+p_{z1})\varphi^2\cos\varphi +$$

$$+\frac{r^3}{B_x}\sum_{n=2}^{\infty}(\eta_n r p_{yn} + \lambda_n r p_{zn} + \mu_n m_{xn})\cos n\varphi. \tag{42}$$

Для коэффициентов η_n, λ_n и μ_n имеют место формулы (26) $B_1, \ldots, B_6$ — произвольные постоянные.

Выражение (42) совместно с (35) позволяет найти решение уравнения (11):

$$w = C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + B_3\varphi\sin\varphi - B_4\varphi\cos\varphi - B_5 +$$

$$+\frac{r^3}{B_x}(rp_{y0} - m_{x0})\varphi + \frac{(1-\nu)r^4}{4B_x}(p_{y1}+p_{z1})\varphi\cos\varphi -$$

$$-\frac{(1+\nu)r^4}{8B_x}(p_{y1}+p_{z1})\varphi^2\sin\varphi +$$

$$+\frac{r^3}{B_x}\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda_n r p_{yn} + \nu_n r p_{zn} + \xi_n m_{xn})\sin n\varphi. \tag{43}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а коэффициенты ν_n и ξ_n определяются формулами (29).

Для постоянных C_1 и C_2, поступая как и в предыдущем случае симметричного нагружения кольца, можно установить следующие их выражения через B_1, B_2, B_3 и B_4:

$$C_1 = B_2 - \frac{1-\nu}{1+\nu}B_4 - \frac{\nu(3-\nu)r^4}{4(1+\nu)B_x}(p_{y1}+p_{z1}) -$$

$$-\frac{\nu r^3}{(1+\nu)B_x}(rp_{y1} - m_{x1}), \tag{44}$$

$$C_2 = -B_1 - \frac{1-\nu}{1+\nu}B_3. \tag{45}$$

Далее, используя (42) — (45), (7), (6) и (35), находим:

$$N = \frac{2B_x}{(1+\nu)r^3}(B_3\cos\varphi + B_4\sin\varphi) - \frac{1}{1+\nu}(rp_{y1} - m_{x1})\sin\varphi -$$

$$-\frac{r}{4}(p_{y1}+p_{z1})\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi\right) - r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{np_{yn}+p_{zn}}{n^2-1}\sin n\varphi, \tag{46}$$

$$M_x = -\frac{2B_x}{(1+\nu) r^2}(B_3 \cos\varphi + B_4 \sin\varphi) + \frac{B_x}{r^2} B_5 -$$

$$- r(rp_{y0} - m_{x0})\varphi - \frac{\nu r}{1+\nu}(rp_{y1} - m_{x1})\sin\varphi +$$

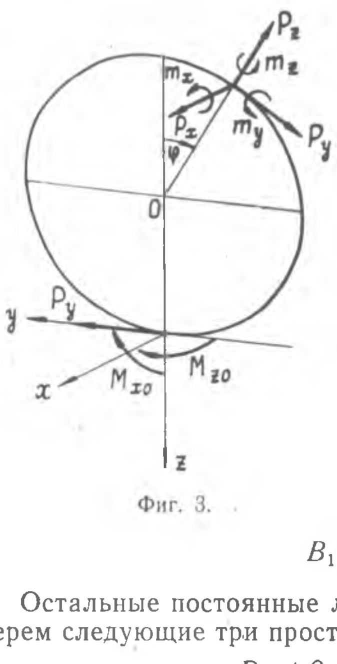
$$+ \frac{r^2}{4}(p_{y1} + p_{z1})\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi\right) +$$

$$+ r\sum_{n=2}^{\infty} \frac{rp_{yn} + nrp_{zn} + (n^2-1) m_{xn}}{n(n^2-1)} \sin n\varphi. \qquad (47)$$

$$Q_z = -\frac{2B_x}{(1+\nu) r^3}(B_3 \sin\varphi - B_4 \cos\varphi) + rp_{y0} + m_{x1}\cos\varphi +$$

$$+ \frac{\nu}{1+\nu}(rp_{y1} - m_{x1})\cos\varphi - \frac{r}{4}(p_{y1} + p_{z1})\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\cos\varphi - 2\varphi\sin\varphi\right) -$$

$$- r\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{yn} + np_{zn}}{n^2-1}\cos n\varphi. \qquad (48)$$



Фиг. 3.

3. Рассмотрим частный случай, когда к кольцу в сечении $\varphi = \pi$ приложена обратно симметричная сосредоточенная нагрузка в виде силы P_y и моментов M_{x0} и M_{z0} (фиг. 3), уравновешенных распределенными силами и моментами, определяемыми разложениями (35) и (36). Легко убедиться, что в соответствии с характером нагружения кольца в выражениях (37) —(41) необходимо принять

$$A_2 = A_4 = A_6 = 0,$$

а в формулах (42) — (48):

$$B_1 = B_3 = B_5 = 0.$$

Остальные постоянные легко найти из граничных условий. Разберем следующие три простейших случая:

а) $$P_y \neq 0, \quad M_{x0} = 0, \quad M_{z0} = 0.$$

Из условий

$$u(\pi) = 0, \quad w(\pi) = 0, \quad \Theta(\pi) = 0,$$

$$N(\pi) = \frac{1}{2} P_y, \quad M_x(\pi) = 0, \quad M_z(\pi) = 0$$

находим

$$rp_{y0} - m_{x0} = -\frac{1}{2\pi} P_y, \quad rp_{x1} + m_{y1} - m_{z1} = 0, \quad p_{y1} + p_{z1} = \frac{1}{\pi r} P_y,$$

$$A_3 = A_5 = 0, \quad B_4 = \frac{(3-\nu) r^3}{4\pi B_x} P_y.$$

б) $$P_y = 0, \quad M_{x0} \neq 0, \quad M_{z0} = 0.$$

Условия

$$u(\pi) = 0, \quad w(\pi) = 0, \quad \Theta(\pi) = 0,$$

$$N(\pi) = 0, \quad M_x(\pi) = \frac{1}{2} M_{x0}, \quad M_z(\pi) = 0.$$

дадут

$$r p_{y0} - m_{x0} = -\frac{1}{2\pi r} M_{x0}, \quad r p_{x1} + m_{y1} - m_{z1} = 0, \quad p_{y1} + p_{z1} = 0,$$

$$A_3 = A_5 = 0, \quad B_4 = \frac{r^2}{2\pi B_x} M_{x0};$$

в) $$P_y = 0, \quad M_{x0} = 0, \quad M_{z0} \neq 0.$$

Используя условия

$$u(\pi) = 0, \quad w(\pi) = 0, \quad \Theta(\pi) = 0,$$

$$N(\pi) = 0, \quad M_x(\pi) = 0, \quad M_z(\pi) = \frac{1}{2} M_{z0},$$

находим

$$r p_{y0} - m_{x0} = 0, \quad r p_{x1} + m_{y1} - m_{z1} = -\frac{1}{\pi r} M_{z0}, \quad p_{y1} + p_{z1} = 0,$$

$$A_3 = A_5 = \frac{\varkappa r^2}{2\pi B_z} M_{z0}, \quad B_4 = 0.$$

Во всех трех рассмотренных случаях постоянные A_1, B_2 и B_6 остаются неопределенными. Для их вычисления необходимо задать перемещение кольца как твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин, В. И. Феодосьев. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Машгиз, 1959.