КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXIX, 1967 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Принятые обозначения:

x, y, z — прямоугольные координаты;
ψ, φ — криволинейные координаты точки срединной поверхности оболочки (ψ — полярное расстояние, φ — долгота);
R — радиус срединной поверхности оболочки;
δ — толщина оболочки;
u, v, w — проекции полного перемещения точки срединной поверхности оболочки на оси x, y и z;
E — модуль упругости материала оболочки;
μ — коэффициент Пуассона;
N_1, N_2 — нормальные усилия;
S — сдвигающее усилие;
M_1, M_2 — изгибающие моменты;
H — крутящий момент;
Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия;
q_x, q_y, q_z — проекции распределенной поверхностной нагрузки на оси x, y и z.

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \lambda^2 = 12(1-\mu^2)\frac{R^2}{\delta^2} - \mu^2,$$

$$(\ )^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial\psi} \quad (\ )' = \frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (\ )' = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$l_n = \frac{d^2}{d\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi\frac{d}{d\psi} - \frac{n^2}{\sin^2\psi} + 1.$$

Вопрос о расчете сферической оболочки при произвольном поверхностном нагружении рассматривался в трудах [1, 2, 3, 4], однако полученные результаты не были доведены до практически приемлемых расчетных формул. Поэтому в предлагаемой статье излагается удобный для практических приложений метод исследования напряженного и деформированного состояния сферической оболочки (в виде сферического сегмента или пояса) при действии произвольной поверхностной нагрузки, компоненты которой допускают разложение в одинарные тригонометрические ряды по углу φ.

Приведем исходные уравнения изгиба сферической оболочки [5], положенные в основу работы.

а) уравнения равновесия:

$$N_1^{\cdot} + (N_1 - N_2)\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi} S' + Q_1 = -Rq_x, \tag{1}$$

$$S^{\cdot} + 2S\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi} N_2' + Q_2 = -Rq_y, \tag{2}$$

$$Q_1^{\cdot} - N_1 - N_2 + \frac{1}{\sin\psi} Q_2' + Q_1\operatorname{ctg}\psi = -Rq_z, \tag{3}$$

$$M_1^{\cdot} + (M_1 - M_2)\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi} H' - RQ_1 = 0, \tag{4}$$

$$H^{\cdot} + 2H\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi} M_2' - RQ_2 = 0; \tag{5}$$

б) зависимости между усилиями и деформациями:

$$N_1 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad S = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\omega, \tag{6}$$

$$M_1 = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2),\ M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), \quad H = D(1-\mu)\left(\tau - \frac{\omega}{2R}\right); \tag{7}$$

в) связь между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}(u^{\cdot} + w), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R}\left(u\operatorname{ctg}\psi + \frac{v'}{\sin\psi} + w\right),$$

$$\omega = \frac{1}{R}\left(\frac{u'}{\sin\psi} + v^{\cdot} - v\operatorname{ctg}\psi\right), \tag{8}$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{R}\vartheta_1^{\cdot}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{R}\left(\vartheta_1\operatorname{ctg}\psi + \frac{\vartheta_2'}{\sin\psi}\right),$$

$$\tau - \frac{\omega}{2R} = \frac{1}{2R}\left(\frac{\vartheta_1'}{\sin\psi} + \vartheta_2^{\cdot} - \vartheta_2\operatorname{ctg}\psi\right),$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{R}(u - w^{\cdot}), \quad \vartheta_2 = \frac{1}{R}\left(v - \frac{w'}{\sin\psi}\right); \tag{9}$$

г) уравнения неразрывности деформаций в усилиях:

$$Q_1 = -\frac{1-\mu}{1+\lambda^2}\left(N^{\cdot} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M^{\cdot}}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_x, \tag{10}$$

$$Q_2 = -\frac{1-\mu}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\left(N' - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M'}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_y, \tag{11}$$

$$\nabla^2 N + \frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\mu}\frac{M}{R} + (1+\mu)\left(Q_1^{\cdot} + Q_1\operatorname{ctg}\psi + \frac{Q_2'}{\sin\psi}\right) =$$

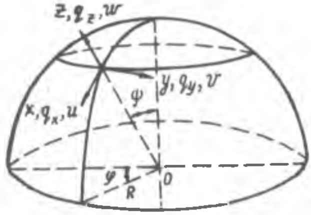
$$= -(1+\mu)R\left(q_x^{\cdot} + q_x\operatorname{ctg}\psi + \frac{q_y'}{\sin\psi}\right). \tag{12}$$

Здесь

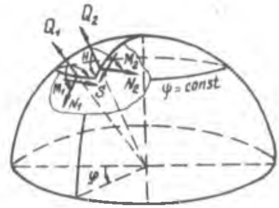
$$N = N_1 + N_2, \quad M = M_1 + M_2. \tag{13}$$

Принятая система координат, а также положительные направления усилий, моментов и перемещений показаны на фиг. 1 и 2.

Уравнения (1)—(5) и (10)—(12) представляют собой полную систему уравнений несимметричного изгиба сферической оболочки в усилиях. Преобразуем ее к виду, удобному для интегрирования.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Для этого подставим выражения (10) и (11) в уравнения (3) и (12). В результате преобразований получим следующие уравнения относительно N и M:

$$(\nabla^2+1)N+\mu N=-\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\mu}\frac{M}{R}-(1+\mu)R\left(q^{\cdot}_x+q_x\operatorname{ctg}\psi+\frac{q_y'}{\sin\psi}-q_z\right). \tag{14}$$

$$(\nabla^2+1)M-\mu M=(1+\mu)RN-(1+\mu)R^2q_z\,, \tag{15}$$

которые являются обобщением уравнений А. Л. Гольденвейзера [5] на случай нагружения сферической оболочки произвольной поверхностной нагрузкой.

Введением комплексной функции

$$\sigma=N+\frac{\mu-i\lambda}{1+\mu}\frac{M}{R} \tag{16}$$

систему (14)—(15) удается свести к одному уравнению

$$\nabla^2\sigma+(1+i\lambda)\sigma=\Phi_q+i\Omega_q, \tag{17}$$

в котором

$$\Phi_q=-(1+\mu)R\left(q^{\cdot}_x+q_x\operatorname{ctg}\psi+\frac{q_y'}{\sin\psi}\right)+Rq_z,\quad \Omega_q=\lambda Rq_z. \tag{18}$$

Далее, уравнения (1)—(2) и (4)—(5) после некоторых преобразований можно привести к следующему виду:

$$X^{\cdot}+2X\operatorname{ctg}\psi+\frac{1}{\sin\psi}Y'=F, \tag{19}$$

$$Y^{\cdot}+2Y\operatorname{ctg}\psi-\frac{1}{\sin\psi}X'=G, \tag{20}$$

$$U^{\cdot}+2U\operatorname{ctg}\psi+\frac{1}{\sin\psi}V'=I, \tag{21}$$

$$V^{\cdot}+2V\operatorname{ctg}\psi-\frac{1}{\sin\psi}U'=K. \tag{22}$$

В этих уравнениях

$$X = N_1 - N_2, \quad Y = 2S, \quad U = M_1 - M_2, \quad V = 2H, \tag{23}$$

$$F = \frac{2(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left(N^{\cdot} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M^{\cdot}}{R}\right) - N^{\cdot} - \frac{2(\lambda^2+\mu^2)}{1+\lambda^2} Rq_x, \tag{24}$$

$$G = \frac{2(1-\mu)}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\left(N' - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M'}{R}\right) - \frac{N'}{\sin\psi} - \frac{2(\lambda^2+\mu^2)}{1+\lambda^2} Rq_y, \tag{25}$$

$$L = -\frac{2(1-\mu)R}{1+\lambda^2}\left(N^{\cdot} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M^{\cdot}}{R}\right) - M^{\cdot} - \frac{2(1-\mu^2)}{1+\lambda^2} R^2 q_x, \tag{26}$$

$$K = -\frac{2(1-\mu)R}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\left(N' - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M'}{R}\right) - \frac{M'}{\sin\psi} - \frac{2(1-\mu^2)}{1+\lambda^2} R^2 q_y. \tag{27}$$

Рассмотрим вопрос об интегрировании уравнений (17) и (19)—(22) для частного случая, когда компоненты поверхностной нагрузки представлены в виде тригонометрических рядов

$$q_x = \sum_{n=0}^{\infty} q_{xn}(\psi)\cos n\varphi, \quad q_y = \sum_{n=1}^{\infty} q_{yn}(\psi)\sin n\varphi, \quad q_z = \sum_{n=0}^{\infty} q_{zn}\cos n\varphi \tag{28}$$

и, следовательно,

$$\Phi_q + i\Omega_q = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_{qn} + i\Omega_{qn})\cos n\varphi. \tag{29}$$

Здесь

$$\Phi_{qn} = -(1+\mu)R\left(q_{xn}^{\cdot} + q_{xn}\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi} q_{yn}\right) + Rq_{zn},$$

$$\Omega_{qn} = \lambda R q_{zn}.$$

В соответствии с (29) общее решение уравнения (17) будем искать в форме бесконечного ряда

$$\sigma(\psi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\psi)\cos n\varphi. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в (17), получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция $\sigma_n(\psi)$:

$$l_n(\sigma_n) + i\lambda\sigma_n = \Phi_{qn} + i\Omega_{qn}. \tag{31}$$

Общее решение этого уравнения:

$$\sigma_n = \sigma_{0n} + \sigma_{qn}. \tag{32}$$

Здесь σ_{qn} — частное решение; σ_{0n} — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$l_n(\sigma_{0n}) + i\lambda\sigma_{0n} = 0. \tag{33}$$

Полагая в уравнении (33)

$$\sigma_{0n} = u_n \sin^n \psi,$$

где u_n — новая искомая функция, получаем:

$$\ddot{u}_n + (2n + 1)\dot{u}_n \operatorname{ctg} \psi - [n(n+1) - 1 - i\lambda] u_n = 0.$$

Переходя в этом уравнении к новому аргументу x, связанному с ψ соотношением

$$x = \sin^2 \frac{\psi}{2},$$

будем иметь

$$x(1-x)\frac{d^2 u_n}{dx^2} + (n+1)(1-2x)\frac{du_n}{dx} - (n^2 + n - 1 - i\lambda) u_n = 0. \tag{34}$$

Нетрудно убедиться, что решением уравнения (34) является функция u_n, определяемая равенством

$$u_n = \frac{d^n \tau}{dx^n}, \tag{35}$$

в котором τ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению [6, 7]

$$x(1-x)\frac{d^2\tau}{dx^2} + (1-2x)\frac{d\tau}{dx} + (1 + i\lambda)\tau = 0.$$

Частными решениями этого уравнения являются функции τ_1 и τ_2:

$$\tau_1 = \varphi_1 + i\omega_1, \quad \tau_2 = \varphi_2 + i\omega_2. \tag{36}$$

Здесь

$$\varphi_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x^m, \quad \omega_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m x^m,$$

$$\varphi_2 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (1-x)^m, \quad \omega_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m (1-x)^m,$$

причем

$$\alpha_m = \frac{m(m-1) - 1}{m^2}\alpha_{m-1} + \frac{\lambda}{m^2}\beta_{m-1},$$

$$\beta_m = \frac{m(m-1) - 1}{m^2}\beta_{m-1} - \frac{\lambda}{m^2}\alpha_{m-1},$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0.$$

Подставляя выражения (36) в (35), найдем частные решения u_{n1} и u_{n2} уравнения (34):

$$u_{n1} = \varphi_{n1} + i\omega_{n1}, \quad u_{n2} = \varphi_{n2} + i\omega_{n2}.$$

Здесь, очевидно:

$$\varphi_{n1} = \frac{d^n \varphi_1}{dx^n}, \; \omega_{n1} = \frac{d^n \omega_1}{dx^n}, \; \varphi_{n2} = \frac{d^n \varphi_2}{dx^n}, \; \omega_{n2} = \frac{d^n \omega_2}{dx^n}.$$

Отсюда легко получаем линейно независимые частные решения уравнения (33), которые мы обозначим через y_{n1} и y_{n2}:

$$y_{n1} = (\varphi_{n1} + i\omega_{n1}) \sin^n \psi, \quad y_{n2} = (\varphi_{n2} + i\omega_{n2}) \sin^n \psi$$

или

$$y_{n1} = \sigma_{n1} + i\tau_{n1}, \quad y_{n2} = \sigma_{n2} + i\tau_{n2},$$

где

$$\sigma_{n1} = \varphi_{n1} \sin^n \psi, \quad \tau_{n1} = \omega_{n1} \sin^n \psi, \quad \sigma_{n2} = \varphi_{n2} \sin^n \psi, \ \tau_{n2} = \omega_{n2} \sin^n \psi.$$

Общее решение уравнения (33) запишется в форме:

$$\sigma_{0n} = c_{n1} y_{n1} + c_{n2} y_{n2},$$

где c_{n1} и c_{n2} — произвольные постоянные.

Удобно для дальнейшего вместо c_{n1} и c_{n2} ввести безразмерные постоянные A_{n1}, B_{n1}, A_{n2} и B_{n2} по формулам

$$c_{n1} = i(1 + i\lambda) \frac{\lambda D}{R^2} (A_{n1} - iB_{n1}), \quad c_{n2} = i(1 + i\lambda) \frac{\lambda D}{R^2} (A_{n2} - iB_{n2})$$

и записать:

$$\sigma_{0n} = i \frac{\lambda D}{R^2} \left[(A_{n1} - iB_{n1})(p_{n1} + iq_{n1}) + (A_{n2} - iB_{n2})(p_{n2} + iq_{n2}) \right].$$

Здесь

$$p_{n1} + iq_{n1} = (1 + i\lambda)(\sigma_{n1} + i\tau_{n1}),$$

так что

$$p_{n1} = \sigma_{n1} - \lambda\tau_{n1}, \quad q_{n1} = \tau_{n1} + \lambda\sigma_{n1}. \tag{37}$$

Формулы для вычисления значений функций p_{n2} и q_{n2} получаются из (37) изменением индекса 1 на индекс 2. Это правило распространяется и на последующие аналогичные формулы.

Частное решение σ_{qn} будем искать методом вариации постоянных интегрирования:

$$\sigma_{qn} = i \frac{\lambda D}{R^2} \left[(P_{n1} - iR_{n1})(p_{n1} + iq_{n1}) + (P_{n2} - iR_{n2})(p_{n2} + iq_{n2}) \right]. \tag{38}$$

Здесь P_{n1}, R_{n1}, P_{n2} и R_{n2} — функции, подлежащие определению.

Составляя уравнения метода вариации произвольных постоянных, получим:

$$\left(\dot{P}_{n1} - i\dot{R}_{n1} \right) y_{n1} + \left(\dot{P}_{n2} - i\dot{R}_{n2} \right) y_{n2} = 0, \tag{39}$$

$$\left(\dot{P}_{n1} - i\dot{R}_{n1} \right) \dot{y}_{n1} + \left(\dot{P}_{n2} - i\dot{R}_{n2} \right) \dot{y}_{n2} = \frac{R^2}{\lambda D} \frac{\Phi_{qn} + i\Omega_{qn}}{i(1 + i\lambda)}. \tag{40}$$

Определителем этой системы уравнений является вронскиан $W(\psi)$ решений y_{n1} и y_{n2} уравнения (33):

$$W(\psi) = y_{n1} \dot{y}_{n2} - \dot{y}_{n1} y_{n2} = -\frac{2(A_n + iB_n)}{\sin \psi}.$$

Здесь

$$A_n = (-1)^n n! \, 2^{2n} \left[A\varphi_{n1}(0) - B\omega_{n1}(0) \right],$$

$$B_n = (-1)^n n!\, 2^{2n} [A\omega_{n1}(0) + B\varphi_{n1}(0)],$$

$$A = \frac{1}{\pi} \sin \pi a_0 \, ch\, \pi b_0, \quad B = \frac{1}{\pi} \cos \pi a_0 \, sh\, \pi b_0,$$

$$a_0 = \frac{\lambda + b_0}{2b_0}, \quad b_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{25 + 16\lambda^2} - 5}{2}},$$

причем

$$\varphi_{n1}(0) = n!\alpha_n, \quad \omega_{n1}(0) = n!\,\beta_n.$$

Решая уравнения (39)—(40) относительно $(\dot P_{n1} - i\dot R_{n1})$, $(\dot P_{n2} - i\dot R_{n2})$ и отделяя в полученных выражениях действительные и мнимые части, будем иметь:

$$\dot P_{n1} = -\frac{1}{E\delta} [(a_n\sigma_{n2} + b_n\tau_{n2})\Phi_{qn} - (a_n\tau_{n2} - b_n\sigma_{n2})\Omega_{qn}] \sin\psi, \quad (41)$$

$$\dot R_{n1} = \frac{1}{E\delta} [(a_n\tau_{n2} - b_n\sigma_{n2})\Phi_{qn} + (a_n\sigma_{n2} + b_n\tau_{n2})\Omega_{qn}] \sin\psi, \quad (42)$$

$$\dot P_{n2} = \frac{1}{E\delta} [(a_n\sigma_{n1} + b_n\tau_{n1})\Phi_{qn} - (a_n\tau_{n1} - b_n\sigma_{n1})\Omega_{qn}] \sin\psi, \quad (43)$$

$$\dot R_{n2} = -\frac{1}{E\delta} [(a_n\tau_{n1} - b_n\sigma_{n1})\Phi_{qn} + (a_n\sigma_{n1} + b_n\tau_{n1})\Omega_{qn}] \sin\psi. \quad (44)$$

Здесь

$$a_n = \frac{6(1-\mu^2)(\lambda A_n + B_n)}{\lambda(1+\lambda^2)\left(A_n^2 + B_n^2\right)}, \quad b_n = a_n \frac{\lambda B_n - A_n}{\lambda A_n + B_n}.$$

Интегрируя, наконец, выражения (41)—(44), получаем сами функции P_{n1}, R_{n1}, P_{n2} и R_{n2}.

Исходя из полученного решения уравнения (31) и выражений (30) и (16), находим общее решение уравнений (14)—(15):

$$N = \frac{D}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{n1}p_{n1} + D_{n1}q_{n1} + C_{n2}p_{n2} + D_{n2}q_{n2}) \cos n\varphi + N_q, \quad (45)$$

$$M = -\frac{(1+\mu)D}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1}p_{n1} + B_{n1}q_{n1} + A_{n2}p_{n2} + B_{n2}q_{n2}) \cos n\varphi + M_q. \quad (46)$$

Здесь

$$C_{n1} = \mu A_{n1} + \lambda B_{n1}, \quad D_{n1} = \mu B_{n1} - \lambda A_{n1},$$

$$N_q = \sum_{n=0}^{\infty} N_{qn} \cos n\varphi, \quad M_q = \sum_{n=0}^{\infty} M_{qn} \cos n\varphi,$$

$$N_{qn} = \frac{D}{R^2} (U_{n1}p_{n1} + V_{n1}q_{n1} + U_{n2}p_{n2} + V_{n2}q_{n2}),$$

$$M_{qn} = -\frac{(1+\mu)D}{R} (P_{n1}p_{n1} + R_{n1}q_{n1} + P_{n2}p_{n2} + R_{n2}q_{n2}),$$

$$U_{n1} = \mu P_{n1} + \lambda R_{n1}, \quad V_{n1} = \mu R_{n1} - \lambda P_{n1}.$$

Имея общее решение (45)—(46) уравнений (14)—(15), нетрудно получить и решение системы (19)—(22). В результате будем иметь выражения для ,

$$X = N_1 - N_2, \quad Y = 2S, U = M_1 - M_2, \quad V = 2H.$$

Они совместно с выражениями (45)—(46) позволяют придти к следующим формулам для вычисления внутренних усилий N_1, N_2, S и моментов M_1, M_2, H:

$$N_1 = \sum_{n=0}^{\infty} N_{1n} \cos n\varphi, \quad N_2 = \sum_{n=0}^{\infty} N_{2n} \cos n\varphi, \; S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin n\varphi, \tag{47}$$

$$M_1 = \sum_{n=0}^{\infty} M_{1n} \cos n\varphi, \; M_2 = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n} \cos n\varphi, \; H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin n\varphi. \tag{48}$$

В этих формулах

$$N_{1n} = -\frac{D}{2R^2}(C_{n1}g_{n1} + D_{n1}h_{n1} + C_{n2}g_{n2} + D_{n2}h_{n2}) + \\ + \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(C_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + D_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}(N_{qn} + X_{qn}), \tag{49}$$

$$N_{2n} = \frac{D}{2R^2}(C_{n1}\alpha_{n1} + D_{n1}\beta_{n1} + C_{n2}\alpha_{n2} + D_{n2}\beta_{n2}) - \\ - \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(C_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + D_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}(N_{qn} - X_{qn}), \tag{50}$$

$$S_n = \frac{D}{2R^2}(C_{n1}\lambda_{n1} + D_{n1}\mu_{n1} + C_{n2}\lambda_{n2} + D_{n2}\mu_{n2}) + \\ + \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(C_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} - D_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}Y_{qn}, \tag{51}$$

$$M_{1n} = -\frac{D}{2R}(A_{n1}\gamma_{n1} + B_{n1}\delta_{n1} + A_{n2}\gamma_{n2} + B_{n2}\delta_{n2}) + \\ + \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(A_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + B_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}(M_{qn} + U_{qn}), \tag{52}$$

$$M_{2n} = \frac{D}{2R}(A_{n1}\zeta_{n1} + B_{n1}\eta_{n1} + A_{n2}\zeta_{n2} + B_{n2}\eta_{n2}) - \\ - \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(A_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + B_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}(M_{qn} - U_{qn}), \tag{53}$$

$$H_n = \frac{(1-\mu)D}{2R}(A_{n1}\lambda_{n1} + B_{n1}\mu_{n1} + A_{n2}\lambda_{n2} + B_{n2}\mu_{n2}) + \\ + \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(A_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} - B_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}V_{qn}, \tag{54}$$

причем

$$g_{n1}(\psi) = 2\left(\sigma'_{n1}\operatorname{ctg}\psi - \frac{n^2}{\sin^2\psi}\sigma_{n1}\right), \; h_{n1}(\psi) = 2\left(\tau'_{n1}\operatorname{ctg}\psi - \frac{n^2}{\sin^2\psi}\tau_{n1}\right), \tag{55}$$

$$\alpha_{n1}(\psi) = g_{n1} + 2p_{n1}, \quad \beta_{n1}(\psi) = h_{n1} + 2q_{n1}, \tag{56}$$

$$\gamma_{n1}(\psi) = (1-\mu) g_{n1} + 2p_{n1}, \quad \delta_{n1}(\psi) = (1-\mu) h_{n1} + 2q_{n1}, \tag{57}$$

$$\zeta_{n1}(\psi) = (1-\mu) g_{n1} - 2\mu p_{n1}, \quad \eta_{n1}(\psi) = (1-\mu) h_{n1} - 2\mu q_{n1}, \tag{58}$$

$$\lambda_{n1}(\psi) = \frac{2n}{\sin\psi}(\sigma_{n1}\operatorname{ctg}\psi - \sigma_{n1}^{\cdot}), \quad \mu_{n1}(\psi) = \frac{2n}{\sin\psi}(\tau_{n1}\operatorname{ctg}\psi - \tau_{n1}^{\cdot}), \tag{59}$$

$$X_{qn} = \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(F_{qn}^*\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + G_{qn}^*\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right), \tag{60}$$

$$Y_{qn} = \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(F_{qn}^*\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} - G_{qn}^*\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right), \tag{61}$$

$$U_{qn} = \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(I_{qn}^*\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + K_{qn}^*\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right), \tag{62}$$

$$V_{qn} = \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(I_{qn}^*\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} - K_{qn}^*\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right), \tag{63}$$

$$F_{qn}^* = \int_{\psi_0}^{\psi}(F_{qn} + G_{qn})\sin^2\psi\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\,d\psi, \quad G_{qn}^* = \int_{\psi_0}^{\psi}(F_{qn} - G_{qn})\sin^2\psi\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\,d\psi, \tag{64}$$

$$I_{qn}^* = \int_{\psi_0}^{\psi}(I_{qn} + K_{qn})\sin^2\psi\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\,d\psi, \quad K_{qn}^* = \int_{\psi_0}^{\psi}(I_{qn} - K_{qn})\sin^2\psi\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\,d\psi, \tag{65}$$

$$F_{qn} = -\left[N_{qn}^{\cdot} - \frac{2(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left(N_{qn}^{\cdot} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}^{\cdot}}{R}\right)\right] - \frac{2(\lambda^2+\mu^2)}{1+\lambda^2}Rq_{xn}, \tag{66}$$

$$G_{qn} = \frac{n}{\sin\psi}\left[N_{qn} - \frac{2(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left(N_{qn} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}}{R}\right)\right] - \frac{2(\lambda^2+\mu^2)}{1+\lambda^2}Rq_{yn}, \tag{67}$$

$$I_{qn} = -\left[M_{qn}^{\cdot} + \frac{2(1-\mu)R}{1+\lambda^2}\left(N_{qn}^{\cdot} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}^{\cdot}}{R}\right)\right] - \frac{2(1-\mu^2)}{1+\lambda^2}R^2q_{xn}, \tag{68}$$

$$K_{qn} = \frac{n}{\sin\psi}\left[M_{qn} + \frac{2(1-\mu)R}{1+\lambda^2}\left(N_{qn} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}}{R}\right)\right] - \frac{2(1-\mu^2)}{1+\lambda^2}R^2q_{yn}, \tag{69}$$

ψ_0 — начальное значение угла ψ; A_{n0}, B_{n0}, C_{n0} и D_{n0} — постоянные интегрирования. При $n = 0$

$$A_{00} = B_{00} = 0, \quad C_{00} = D_{00}.$$

Для перерезывающих усилий Q_1 и Q_2 будем иметь:

$$Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{1n}\cos n\varphi, \quad Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}\sin n\varphi. \tag{70}$$

Здесь

$$Q_{1n} = -\frac{D}{R^2}(C_{n1}\sigma_{n1}^{\cdot} + D_{n1}\tau_{n1}^{\cdot} + C_{n2}\sigma_{n2}^{\cdot} + D_{n2}\tau_{n2}^{\cdot}) -$$

$$-\frac{1-\mu}{1+\lambda^2}\left(N_{qn}^{\cdot} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}^{\cdot}}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_{xn}, \tag{71}$$

$$Q_{2n}=\frac{nD}{R^2\sin\psi}\left(C_{n1}\sigma_{n1}+D_{n1}\tau_{n1}+C_{n2}\sigma_{n2}+D_{n2}\tau_{n2}\right)+$$

$$+\frac{n(1-\mu)}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\left(N_{qn}-\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}}{R}\right)-\frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_{yn}. \tag{72}$$

Перейдем теперь к определению перемещений точек срединной поверхности оболочки. Из выражений (6) и (8) находим:

$$u^{\cdot}-u\operatorname{ctg}\psi-\frac{v'}{\sin\psi}=\frac{(1+\mu)R}{E\delta}(N_1-N_2),$$

$$v^{\cdot}-v\operatorname{ctg}\psi+\frac{u'}{\sin\psi}=\frac{2(1+\mu)R}{E\delta}S.$$

Полагая, что

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\cos n\varphi,\quad v=\sum_{n=1}^{\infty}v_n\sin n\varphi, \tag{73}$$

воспользуемся найденными ранее выражениями для N_1, N_2 и S. В результате получим систему уравнений для определения u_n и v_n. После интегрирования этих уравнений будем иметь:

$$u_n=\frac{(1+\mu)D}{E\delta R}\left(C_{n1}\sigma^{\cdot}_{n1}+D_{n1}\tau^{\cdot}_{n1}+C_{n2}\sigma^{\cdot}_{n2}+D_{n2}\tau^{\cdot}_{n2}\right)+$$

$$+\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}(C_{n0}y_n+D_{n0}z_n)+\frac{R}{2}\left(C^*_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}+D^*_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi+u_{qn}, \tag{74}$$

$$v_n=-\frac{n(1+\mu)D}{E\delta R\sin\psi}\left(C_{n1}\sigma_{n1}+D_{n1}\tau_{n1}+C_{n2}\sigma_{n2}+D_{n2}\tau_{n2}\right)+$$

$$+\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}(C_{n0}y_n-D_{n0}z_n)+\frac{R}{2}\left(C^*_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}-D^*_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi+v_{qn}, \tag{75}$$

$$y_n=-\frac{\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}}{2n(n^2-1)}\left[\frac{2n(n-\cos\psi)}{\sin\psi}-\sin\psi\right],$$

$$z_n=\frac{\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}}{2n(n^2-1)}\left[\frac{2n(n+\cos\psi)}{\sin\psi}-\sin\psi\right] \tag{76}$$

для $n\geqslant 2$ и

$$y_1=\frac{1}{2}\left[(1-\cos\psi)\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\frac{3}{4}(1-\cos\psi)-\frac{1+\cos\psi}{\sin^2\psi}-1\right], \tag{77}$$

$$z_1=\frac{1}{2}\left[(1+\cos\psi)\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}-\frac{3}{4}(1+\cos\psi)+\frac{1-\cos\psi}{\sin^2\psi}+1\right], \tag{78}$$

$$y_0=z_0=\sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}-\operatorname{ctg}\psi \tag{79}$$

для $n=1$ и $n=0$.

Перемещения u_{qn} и v_{qn} при любом n определяются формулами

$$u_{qn}=\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}\left(X^*_{qn}\ \mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}+Y^*_{qn}\,\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi, \tag{80}$$

$$v_{qn}=\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}\left(X^*_{qn}\ \mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}-Y^*_{qn}\,\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi, \tag{81}$$

где

$$X^*_{qn}=\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{X_{qn}+Y_{qn}}{\sin\psi}\,\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}\,d\psi,\quad Y^*_{qn}=\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{X_{qn}-Y_{qn}}{\sin\psi}\,\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}\,d\psi. \tag{82}$$

Для нормального перемещения w из равенств (6) и (8) находим

$$w=\frac{(1-\mu)R}{2E\delta}(N_1+N_2)-\frac{1}{2}\left(u^{\cdot}+u\,\mathrm{ctg}\,\psi+\frac{v^{\cdot}}{\sin\psi}\right).$$

Положив, что

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}w_n\cos n\varphi, \tag{83}$$

воспользуемся выражениями (73) — (75) и (45). В результате будем иметь:

$$w_n=\frac{D}{E\delta R}(C_{n1}p_{n1}+D_{n1}q_{n1}+C_{n2}p_{n2}+D_{n2}q_{n2})+R(A^*_{n0}P^n_1+B^*_{n0}Q^n_1)+w_{qn}. \tag{84}$$

Здесь

$$P^n_1=(n+\cos\psi)\,\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2},\quad Q^n_1=(n-\cos\psi)\,\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2} \tag{85}$$

для $n\geqslant 2$ и

$$P^1_1=-\sin\psi,\qquad Q^1_1=\sin\psi\ln\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}-\mathrm{ctg}\,\psi, \tag{86}$$

$$P^0_1=\cos\psi,\qquad Q^0_1=-1-\cos\psi\ln\mathrm{tg}\frac{\psi}{2} \tag{87}$$

для $n=1$ и $n=0$, причем

$$A^*_{n0}=-\frac{1}{2}C^*_{n0}+\frac{1+\mu}{4E\delta n(n^2-1)}D_{n0},\quad B^*_{n0}=\frac{1}{2}D^*_{n0}+\frac{1+\mu}{4E\delta n(n^2-1)}C_{n0},$$

$$A^*_{10}=\frac{1}{2}(C^*_{10}-D^*_{10})+\frac{3(1+\mu)}{16E\delta}(C_{10}+D_{10}),\quad B^*_{10}=-\frac{1+\mu}{4E\delta}(C_{10}-D_{10}),$$

$$A^*_{00}=-C^*_{00},\quad B^*_{00}=\frac{1+\mu}{E\delta}C_{00},$$

$$w_{qn}=\frac{(1-\mu)R}{2E\delta}N_{qn}-\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}X_{qn}-u_{qn}\,\mathrm{ctg}\,\psi-\frac{n}{\sin\psi}v_{qn}. \tag{88}$$

В выражения (49)—(54), (74)—(75) входят шесть постоянных интегрирования A_{n0}, B_{n0}, C_{n0}, D_{n0}, C^*_{n0} и D^*_{n0}. Так как число по-формулы (7), (9), (48), (52), (53), (54) с формулами (73), (74), (75), (83), (84). В результате получим:

$$A_{n0} = -\frac{n(n^2-1)(1-\mu)D}{R}\overset{*}{D}_{n0} + \frac{(1-\mu^2)D}{2E\delta R}C_{n0},$$

$$B_{n0} = \frac{n(n^2-1)(1-\mu)D}{R}\overset{*}{C}_{n0} + \frac{(1-\mu^2)D}{2E\delta R}D_{n0}$$

для $n \geqslant 2$ и

$$A_{10} = B_{10} = \frac{D(1-\mu^2)}{2E\delta R}(C_{10} + D_{10})$$

для $n = 1$.

Отсюда следует, что независимыми произвольными постоянными будут C_{n0}, D_{n0} и C_{n0}^*, D_{n0}^*.

В заключение приведем результаты численного расчета сферического сегмента, жестко защемленного по краю $\psi = \beta$ и нагруженного нормальным давлением (фиг. 3).

$$q_z = -q\sin\psi\cos\varphi. \tag{89}$$

Параметры оболочки: $\beta = 20°$, $\lambda = 1000$ (что при $\mu = 0{,}3$ соответствует значению $\frac{R}{\delta} = 302{,}61$). В соответствии с (89) будем иметь

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_{11}\cos\varphi, & N_2 &= N_{21}\cos\varphi, & S &= S_1\sin\varphi,\\
M_1 &= M_{11}\cos\varphi, & M_2 &= M_{21}\cos\varphi, & H &= H_1\sin\varphi,\\
u &= u_1\cos\varphi, & v &= v_1\sin\varphi, & w &= w_1\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Выражения N_{11}, N_{21}, S_1, M_{11}, M_{21}, H_1, u_1, v_1 и w_1 определяем по формулам (49)—(54), (73), (74) и (83) при значении $n=1$. Входящие в эти формулы величины N_{q1}, M_{q1}, X_{q1}, Y_{q1}, U_{q1}, V_{q1}, u_{q1} и v_{q1} имеют вид:

$$N_{q1} = -\left[1 - \frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}\right]qR\sin\psi, \quad M_{q1} = -\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}qR^2\sin\psi,$$

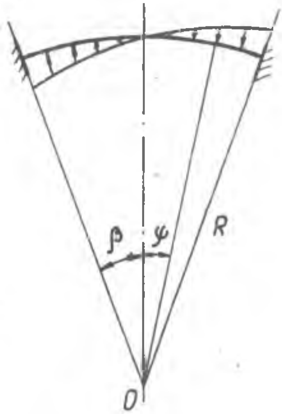
$$X_{q1} = \frac{qR}{3}\left(\sin\psi + \frac{2}{\sin\psi}\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}\right),$$

$$Y_{q1} = -\frac{qR}{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + \frac{2}{\sin\psi}\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}\right),$$

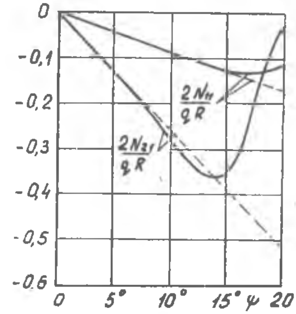
$$U_{q1} = V_{q1} = 0,$$

$$u_{q1} = \frac{(1+\mu)qR^2}{3E\delta}\left[1 - \cos\psi\ln\frac{1+\cos\psi}{2} - \frac{3}{4}(1+\cos\psi) + \frac{1}{\sin\psi}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right],$$

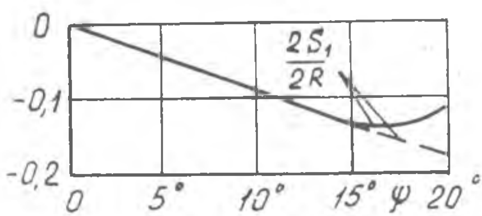
$$v_{q1} = -\frac{(1+\mu)qR^2}{3E\delta}\left[1 - \ln\frac{1+\cos\psi}{2} - \frac{3}{4}(1+\cos\psi) + \frac{1}{\sin\psi}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right].$$



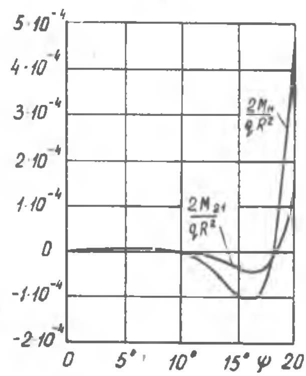
Фиг. 3.



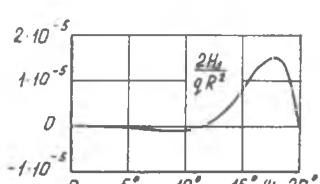
Фиг. 4.



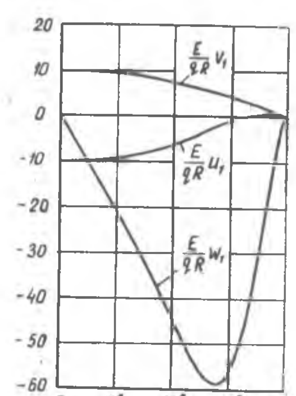
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Так как все внутренние усилия и моменты в оболочке должны иметь конечные значения, то

$$C_{10} = D_{10} = 0, \quad C_{12} = D_{12} = 0.$$

Постоянные C_{11}, D_{11}, C_{10}^* и D_{10}^* находим из граничных условий:

1) $u(\beta) = 0$, 2) $v(\beta) = 0$, 3) $w(\beta) = 0$, 4) $\vartheta_1(\beta) = 0$.

Этим условиям соответствуют графики распределения безразмерных усилий, приведенные на фиг. 4 и 5. Пунктиром показаны значения этих усилий, вычисленные по безмоментной теории. На фиг. 6, 7 и 8 приведены графики безразмерных моментов и перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соколовский. О расчете сферической оболочки. Доклады АН СССР, т. XVI, № 1, 1937.
2. В. В. Новожилов. Расчет напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольной нагрузке. Доклады АН СССР, т. XXVII, № 6, 1940.
3. В. З. Власов. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, 1949.
4. В. Г. Рекач. Расчет тонких сферических оболочек. Труды МИСИ им. В. В. Куйбышева, в. 34, 1963.
5. А. Л. Гольденвейзер. Исследование напряженного состояния сферической оболочки, ПММ, т. VIII, вып. 6, 1944.
6. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
7. И. С. Ахмедьянов. Интегрирование основного дифференциального уравнения изгиба сферической оболочки при произвольном нагружении. Труды КуАИ, в. XIX, 1965.