

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

## РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ЧЕРЕЗ ЭКСЦЕНТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ЖЕСТКУЮ ШАЙБУ

### ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$R$ , — радиус срединной поверхности сферической оболочки;  $\delta$  — толщина оболочки;  $\psi$ ,  $\varphi$  — криволинейные (географические) координаты точки срединной поверхности оболочки;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — подвижная правая прямоугольная декартова система осей координат с началом на срединной поверхности оболочки;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — проекции вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ ;  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  — углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки вокруг осей  $y$  и  $x$ ;  $E$ ,  $\mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;  $N_1$ ,  $N_2$ ;  $S$  — нормальные и сдвигающее усилия;  $Q_1$ ,  $Q_2$  — перерезывающие усилия;  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$  — изгибающие и крутящий моменты;

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \lambda^2 = 12m^2(1-\mu^2) - \mu^2,$$

$$m = \frac{R}{\delta}; \quad \kappa = \frac{1}{12m^2}; \quad \gamma = \frac{1}{24m^2(1-\mu^2)}.$$

Принятая система осей координат, а также положительные направления усилий, моментов и перемещений показаны на рис. 1 и 2.

Приведем основные формулы расчета сферической оболочки при симметричном нагружении.

1. Если сферическая оболочка находится под действием краевой нагрузки, симметричной относительно плоскости  $\varphi=0$ , то внутренние усилия и моменты можно определить по следующим формулам [1]:

$$N_1 = \sum_{n=0}^{\infty} N_{1n} \cos n\varphi; \quad N_2 = \sum_{n=0}^{\infty} N_{2n} \cos n\varphi; \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin n\varphi;$$
$$Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{1n} \cos n\varphi; \quad Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n} \sin n\varphi; \quad (1)$$

$$M_1 = \sum_{n=0}^{\infty} M_{1n} \cos n\varphi; \quad M_2 = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n} \cos n\varphi; \quad H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin n\varphi.$$

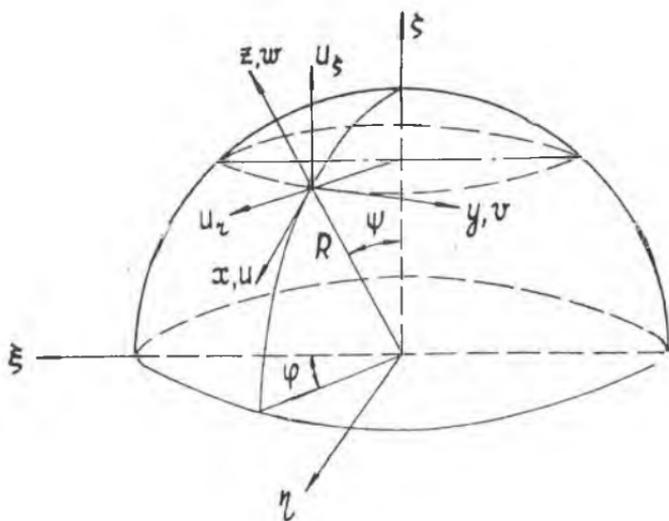


Рис. 1

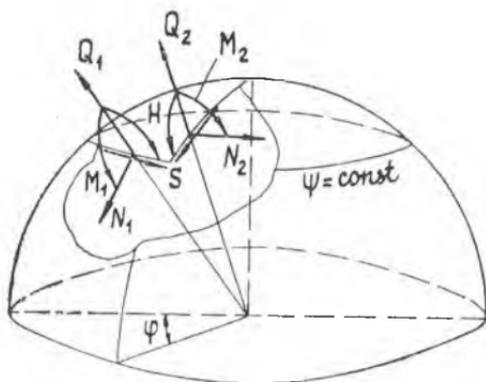


Рис. 2.

Здесь (штрих означает производную по аргументу  $\psi$ )

$$N_{1n} = -\gamma E \delta \sum_{i=1}^2 (C_{in} g_{in} + D_{in} h_{in}) + \frac{E \delta}{\sin^2 \psi} (C_n \lambda_n + D_n \lambda'_n);$$

$$N_{2n} = \gamma E \delta \sum_{i=1}^2 (C_{in} \alpha_{in} + D_{in} \beta_{in}) - \frac{E \delta}{\sin^2 \psi} (C_n \lambda_n + D_n \lambda'_n);$$

$$S_n = \gamma E \delta \sum_{i=1}^2 (C_{in} \lambda_{in} + D_{in} \mu_{in}) - \frac{E \delta}{\sin^2 \psi} (C_n \lambda_n - D_n \lambda'_n);$$

$$Q_{1n} = -2\gamma E\delta \sum_{i=1}^2 (C_{in} \sigma'_{in} + D_{in} \tau'_{in}); \quad (2)$$

$$Q_{2n} = \frac{2n\gamma E\delta}{\sin \psi} \sum_{i=1}^2 (C_{in} \sigma_{in} + D_{in} \tau_{in});$$

$$M_{1n} = -m\gamma E\delta^2 \sum_{i=1}^2 (A_{in} \gamma_{in} + B_{in} \delta_{in}) + \frac{E\delta^2}{6 \sin^2 \psi} (A_n \lambda_n + B_n \mu_n);$$

$$M_{2n} = m\gamma E\delta^2 \sum_{i=1}^2 (A_{in} \zeta_{in} + B_{in} \eta_{in}) - \frac{E\delta^2}{6 \sin^2 \psi} (A_n \lambda_n + B_n \mu_n);$$

$$H_n = m\gamma E\delta^2 (1 - \mu) \sum_{i=1}^2 (A_{in} \lambda_{in} + B_{in} \mu_{in}) - \frac{E\delta^2}{6 \sin^2 \psi} (A_n \lambda_n - B_n \mu_n),$$

причем

$$\alpha_{1n}(\psi) = g_{1n} + 2p_{1n}; \quad \beta_{1n}(\psi) = h_{1n} + 2q_{1n};$$

$$\gamma_{1n}(\psi) = (1 - \mu)g_{1n} + 2p_{1n}; \quad \delta_{1n}(\psi) = (1 - \mu)h_{1n} + 2q_{1n};$$

$$\zeta_{1n}(\psi) = (1 - \mu)g_{1n} - 2\mu p_{1n}; \quad \tau_{1n}(\psi) = (1 - \mu)h_{1n} - 2\mu q_{1n}; \quad (3)$$

$$\lambda_{1n}(\psi) = \frac{2n}{\sin \psi} (\sigma_{1n} \operatorname{ctg} \psi - \sigma'_{1n}); \quad \mu_{1n}(\psi) = \frac{2n}{\sin \psi} (\tau_{1n} \operatorname{ctg} \psi - \tau'_{1n});$$

$$g_{1n}(\psi) = 2 \left( \sigma'_{1n} \operatorname{ctg} \psi - \frac{n^2}{\sin^2 \psi} \sigma_{1n} \right); \quad h_{1n}(\psi) = 2 \left( \tau'_{1n} \operatorname{ctg} \psi - \frac{n^2}{\sin^2 \psi} \tau_{1n} \right);$$

$$p_{1n}(\psi) = \sigma_{1n} - \lambda \tau_{1n}; \quad q_{1n}(\psi) = \tau_{1n} + \lambda \sigma_{1n};$$

$$C_{1n} = \mu A_{1n} + \lambda B_{1n}; \quad D_{1n} = \mu B_{1n} - \lambda A_{1n}. \quad (4)$$

Формулы для  $\alpha_{2n}, \dots, q_{2n}, C_{2n}$  и  $D_{2n}$  получаются из (3) и (4) изменением индекса 1 на индекс 2.

Функции  $\sigma_{1n}, \tau_{1n}, \sigma_{2n}, \tau_{2n}$  находятся из соотношений

$$\sigma_{1n} + i\tau_{1n} = y_{1n}, \quad \sigma_{2n} + i\tau_{2n} = y_{2n},$$

где  $y_{1n}, y_{2n}$  — линейно независимые частные решения дифференциального уравнения [1]

$$\sigma_n'' + \sigma_n' \operatorname{ctg} \psi + \left( 1 + i\lambda - \frac{n^2}{\sin^2 \psi} \right) \sigma_n = 0.$$

2. Перемещения  $u, v, w$  точки срединной поверхности оболочки и углы  $\vartheta_1, \vartheta_2$  поворота нормали определяются формулами

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos n\varphi; \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin n\varphi; \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\varphi; \quad (5)$$

$$\vartheta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{1n} \cos n\varphi; \quad \vartheta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_{2n} \sin n\varphi,$$

и которых

$$\frac{u_n}{R} = 2\gamma(1 + \mu) \sum_{i=1}^2 (C_{in} \sigma'_{in} + D_{in} \tau'_{in}) + C_n F_n - D_n G_n + C_n^* F_n^* + D_n^* G_n^*;$$

$$\frac{v_n}{R} = -\frac{2n\gamma(1 + \mu)}{\sin \psi} \sum_{i=1}^2 (C_{in} \sigma_{in} + D_{in} \tau_{in}) - C_n F_n - D_n G_n + C_n^* F_n^* - D_n^* G_n^*;$$

$$\frac{w_n}{R} = 2\gamma \sum_{i=1}^2 (C_{in} p_{in} + D_{in} q_{in}) + C_n X_n + D_n Y_n - C_n^* X_n^* + D_n^* Y_n^*; \quad (6)$$

$$\vartheta_{1n} = \sum_{i=1}^2 (A_{in} \sigma'_{in} + B_{in} \tau'_{in}) + C_n \Gamma_n - D_n \Delta_n + C_n^* \Gamma_n^* + D_n^* \Delta_n^*;$$

$$\vartheta_{2n} = -\frac{n}{\sin \psi} \sum_{i=1}^2 (A_{in} \sigma_{in} + B_{in} \tau_{in}) - C_n \Phi_n - D_n \Omega_n - C_n^* \Phi_n^* + D_n^* \Omega_n^*,$$

для  $n \geq 2$ , причем

$$F_n(\psi) = \nu_n(2\zeta_n - \lambda_n) \sin \psi; \quad G_n(\psi) = \nu_n(2\gamma_n - \mu_n) \sin \psi;$$

$$F_n^*(\psi) = \lambda_n \sin \psi; \quad G_n^*(\psi) = \mu_n \sin \psi;$$

$$X_n(\psi) = \nu_n X_n^*; \quad Y_n(\psi) = \nu_n Y_n^*;$$

$$X_n^*(\psi) = P_1^n; \quad Y_n^*(\psi) = Q_1^n;$$

$$\Gamma_n(\psi) = \nu_n \Gamma_n^*; \quad \Delta_n(\psi) = \nu_n \Delta_n^*;$$

$$\Gamma_n^*(\psi) = \zeta_n \sin \psi; \quad \Delta_n^*(\psi) = \gamma_n \sin \psi; \quad (7)$$

$$\Phi_n(\psi) = \nu_n \Phi_n^*; \quad \Omega_n(\psi) = \nu_n \Omega_n^*;$$

$$\Phi_n^*(\psi) = (\zeta_n - \lambda_n) \sin \psi; \quad \Omega_n^*(\psi) = (\gamma_n - \mu_n) \sin \psi;$$

$$\zeta_n(\psi) = \frac{n}{\sin^2 \psi} P_1^n; \quad \gamma_n(\psi) = \frac{n}{\sin^2 \psi} Q_1^n;$$

$$\lambda_n(\psi) = \operatorname{tg}^n \frac{\psi}{2}; \quad \mu_n(\psi) = \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2};$$

$$P_1^n(\psi) = (n + \cos \psi) \operatorname{tg}^n \frac{\psi}{2}; \quad Q_1^n(\psi) = (n - \cos \psi) \operatorname{ctg}^n \frac{\psi}{2};$$

$$\nu_n = \frac{1 + \mu}{2n(n^2 - 1)}.$$

Для  $n = 1$  и  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{R} &= 2\gamma(1 + \mu) \sum_{i=1}^2 (C_{i1} \sigma'_{i1} + D_{i1} \tau'_{i1}) + (C_1 + D_1) F_1 + (C_1 - D_1) G_1 + \\ &+ C_1^* + D_1^* - (C_1^* - D_1^*) \cos \psi; \end{aligned}$$

$$\frac{v_1}{R} = -\frac{2\gamma(1+\mu)}{\sin\psi} \sum_{i=1}^2 (C_{i1}\sigma_{i1} + D_{i1}\tau_{i1}) - (C_1 + D_1)G_1 - (C_1 - D_1)F_1 - (C_1^* + D_1^*)\cos\psi + C_1^* - D_1^* ;$$

$$\frac{w_1}{R} = 2\gamma \sum_{i=1}^2 (C_{i1}p_{i1} + D_{i1}q_{i1}) + (C_1 + D_1)X_1 + (C_1 - D_1)Y_1 - (C_1^* - D_1^*)\sin\psi ;$$

$$\vartheta_{11} = \sum_{i=1}^2 (A_{i1}\sigma'_{i1} + B_{i1}\tau'_{i1}) + (C_1 + D_1)\Gamma_1 + (C_1 - D_1)\Delta_1 + C_1^* + D_1^* ; \quad (8)$$

$$\vartheta_{21} = -\frac{1}{\sin\psi} \sum_{i=1}^2 (A_{i1}\sigma_{i1} + B_{i1}\tau_{i1}) - (C_1 + D_1)\Phi_1 - (C_1 - D_1)\Omega_1 - (C_1^* + D_1^*)\cos\psi ;$$

$$\frac{u_0}{R} = 2\gamma(1+\mu) \sum_{i=1}^2 (C_{i0}\sigma'_{i0} + D_{i0}\tau'_{i0}) + 2C_0F_0 + 2C_0^*\sin\psi ;$$

$$\frac{w_0}{R} = 2\gamma \sum_{i=1}^2 (C_{i0}p_{i0} + D_{i0}q_{i0}) + 2C_0X_0 - 2C_0^*\cos\psi ;$$

$$\vartheta_{10} = \sum_{i=1}^2 (A_{i0}\sigma'_{i0} + B_{i0}\tau'_{i0}) ;$$

$$\frac{v_0}{R} = 0, \quad \vartheta_{20} = 0.$$

Здесь

$$F_1(\psi) = \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{Q_1^1}{\sin\psi} - \frac{3}{4} \cos\psi \right); \quad G_1(\psi) = \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{dQ_1^1}{d\psi} - \frac{3}{4} \right);$$

$$X_1(\psi) = -\frac{3}{8}(1+\mu)\sin\psi; \quad Y_1(\psi) = \frac{1+\mu}{2} Q_1^1 ;$$

$$\Gamma_1(\psi) = \frac{1+\mu}{2} \frac{Q_1^1}{\sin\psi}; \quad \Delta_1(\psi) = -\frac{3}{8}(1+\mu); \quad (9)$$

$$\Phi_1(\psi) = \frac{1+\mu}{2} \frac{dQ_1^1}{d\psi}; \quad \Omega_1(\psi) = -\frac{3}{8}(1+\mu)\cos\psi;$$

$$F_0(\psi) = (1+\mu)Q_1^1; \quad X_0(\psi) = (1+\mu)Q_1^0,$$

причем

$$Q_1^1(\psi) = \sin\psi \ln \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg} \psi; \quad Q_1^0(\psi) = -\cos\psi \ln \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} - 1. \quad (10)$$

3. В предыдущих формулах для усилий, моментов и перемещений через  $A_{1n}$ ,  $B_{1n}$ ,  $A_{2n}$ ,  $B_{2n}$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $C_n^*$  и  $D_n^*$  обозначены постоянные интегрирования, из которых  $C_0$ ,  $C_1$  и  $D_1$  находятся из уравнений равновесия. Остальные определяются из граничных условий.

Постоянные  $A_n$ ,  $B_n$  и  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $C_n^*$ ,  $D_n^*$  ( $n \geq 2$ ) связаны между собой следующими зависимостями [1]:

$$A_n = \frac{1}{4m} \left( C_n + \frac{1}{v_n} C_n^* \right); \quad B_n = \frac{1}{4m} \left( D_n - \frac{1}{v_n} D_n^* \right)$$

Для  $n = 1$  и  $n = 0$ ;

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{4m} (C_1 + D_1); \quad A_0 = B_0 = 0.$$

Кроме того,

$$C_0 = D_0, \quad C_0^* = D_0^*.$$

4. Равнодействующая всех внутренних усилий  $N_1$   $S$  и  $Q_1$ , распределенных вдоль некоторой параллели  $\psi$ , имеет составляющие  $F_z$ ,  $F_\eta$  и  $F_\xi$  (рис. 3), равные

$$F_z = \pi R E \delta (C_1 - D_1); \quad F_\eta = 0; \quad F_\xi = -4\pi R E \delta C_0. \quad (11)$$

Далее, усилия  $N_1$ ,  $S$ ,  $Q_1$  и моменты  $M_1$ ,  $H$ , действующие вдоль рассматриваемой параллели, дают момент относительно оси  $\eta$ , равный

$$M_\eta = \pi R^2 E \delta [(1 + \nu)(C_1 + D_1) - (C_1 - D_1) \cos \psi]. \quad (12)$$

Моменты относительно осей  $\xi$  и  $\zeta$ , очевидно, будут равны нулю.

Если к верхнему краю оболочки  $\psi = \psi_0$  приложены краевые усилия и моменты, приводящиеся к силам  $P_0$  и  $P$  и моменту  $M_0$ , действующим в плоскости  $\varphi_1 = 0$  (рис. 4), то из (11) и (12) легко получаем

$$2C_0 = \frac{P_0}{2\pi R E \delta}; \quad C_1 + D_1 = -\frac{M_0 + P R \cos \psi_0}{\pi R^2 E \delta (1 + \nu)}; \quad C_1 - D_1 = -\frac{P}{\pi R E \delta}. \quad (13)$$

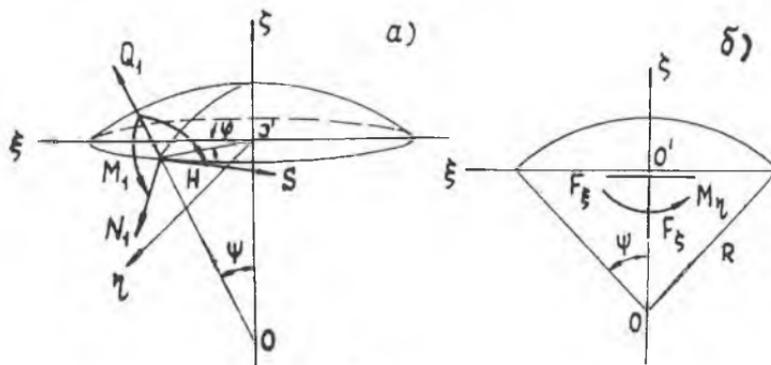


Рис. 3.

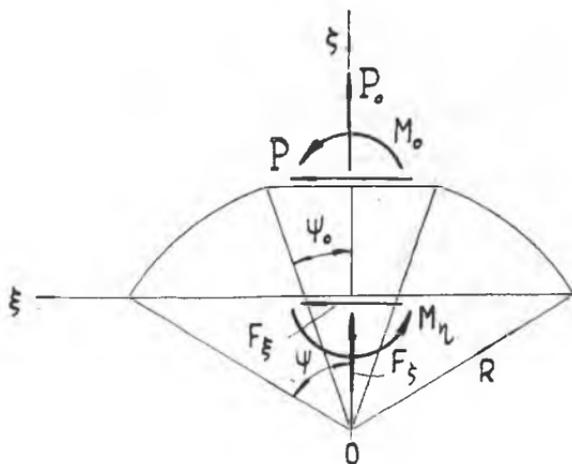


Рис. 4.

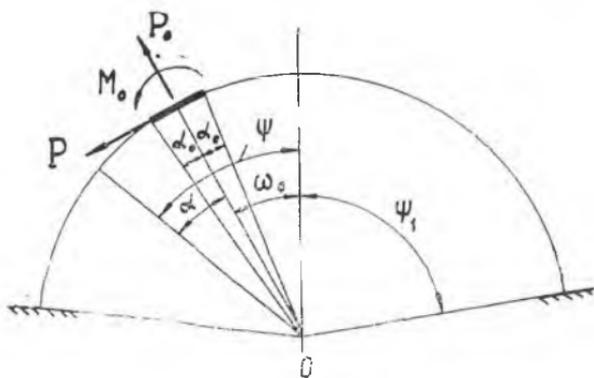


Рис. 5.

5. Рассмотрим оболочку в виде сферического сегмента, ограниченного параллелью  $\psi = \psi_1$  (рис. 5). Пусть на нормали к срединной поверхности оболочки, определяемой углами  $\varphi = 0$  и  $\psi = \omega_0$ , располагается центр круглой жесткой шайбы, к которой приложены радиальная сила  $P_0$ , касательная сила  $P$  и момент  $M_0$ , действующие в плоскости  $\varphi = 0$  (размер шайбы определяется углом  $\alpha_0$ ).

Для исследования напряженного и деформированного состояния оболочки введем новую систему географических координат  $\alpha, \beta$  с полюсом в точке  $\varphi = 0, \psi = \omega_0$  (точка  $B$ , рис. 6). При этом связь между координатами  $\alpha, \beta, \psi$  и  $\varphi$  одной и той же точки  $C$  срединной поверхности оболочки получим, воспользовавшись формулами сферической тригонометрии [2]:

$$\cos \alpha = \cos \omega_0 \cos \psi + \sin \omega_0 \sin \psi \cos \varphi;$$

$$\cos \psi = \cos \omega_0 \cos \alpha - \sin \omega_0 \sin \alpha \cos \beta.$$

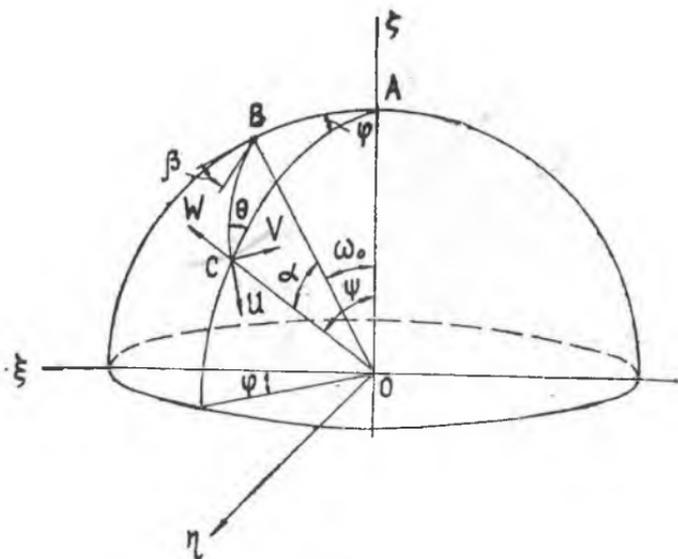


Рис. 6.

Для угла  $\theta$ , под которым пересекаются меридианы  $\beta = \text{const}$  и  $\varphi = \text{nst}$ , будем иметь

$$\cos \omega_0 = \cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi \cos \theta.$$

Кроме того, для сферического треугольника ABC имеет место следующая теорема синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{\sin \psi}{\sin \beta} = \frac{\sin \omega_0}{\sin \theta}.$$

Введем следующие обозначения для усилий, моментов и перемещений в системе  $\alpha, \beta$  (рис. 7):

$N_\alpha, N_\beta, S_{\alpha\beta}$  — нормальные и сдвигающее усилия;  $Q_\alpha, Q_\beta$  — перерезывающие усилия;  $M_\alpha, M_\beta, H_{\alpha\beta}$  — изгибающие и крутящий моменты;  $U, V, W$  — проекции вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки на касательные к линиям  $\beta = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$  и на нормаль к срединной поверхности;  $\chi_1, \chi_2$  — углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки вокруг касательных к линиям  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$ .

6. Усилия  $N_\alpha, N_\beta, S_{\alpha\beta}$ ,  $Q_\alpha, Q_\beta$  и моменты  $M_\alpha, M_\beta, H_{\alpha\beta}$  в системе  $(\alpha, \beta)$  связаны с усилиями  $N_1, N_2, S, Q_1, Q_2$  и моментами  $M_1, M_2, H$  следующими зависимостями [3]:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= N_1 \cos^2 \theta + N_2 \sin^2 \theta + 2S \sin \theta \cos \theta; \\ N_\beta &= N_1 \sin^2 \theta + N_2 \cos^2 \theta - 2S \sin \theta \cos \theta; \\ S_{\alpha\beta} &= -(N_1 - N_2) \sin \theta \cos \theta + S(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta); \end{aligned}$$

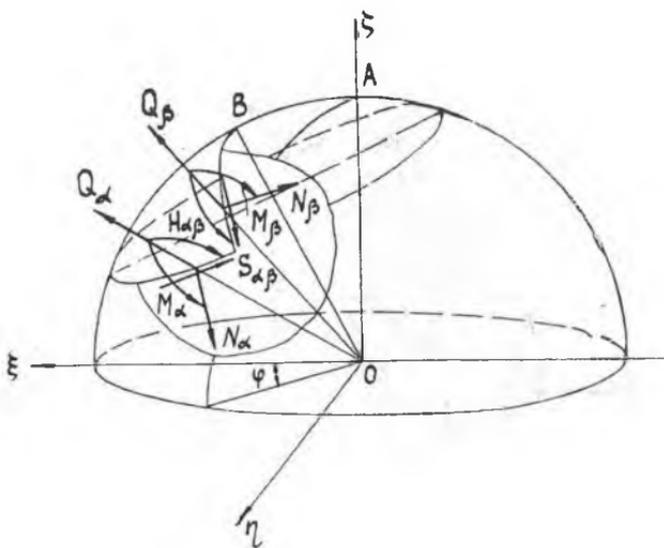


Рис. 7.

$$Q_{\alpha} = Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta; \quad (14)$$

$$Q_{\beta} = -Q_1 \sin \theta + Q_2 \cos \theta;$$

$$M_{\alpha} = M_1 \cos^2 \theta + M_2 \sin^2 \theta + 2H \sin \theta \cos \theta;$$

$$M_{\beta} = M_1 \sin^2 \theta + M_2 \cos^2 \theta - 2H \sin \theta \cos \theta;$$

$$H_{\alpha\beta} = -(M_1 - M_2) \sin \theta \cos \theta + H (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

7. Рассмотрим связь между перемещениями в системах  $(\alpha, \beta)$  и  $(\gamma, \psi)$ . Из рис. 8 находим:

$$U = u \cos \theta + v \sin \theta; \quad V = -u \sin \theta + v \cos \theta. \quad (15)$$

или

$$u = U \cos \theta - V \sin \theta; \quad v = U \sin \theta + V \cos \theta. \quad (16)$$

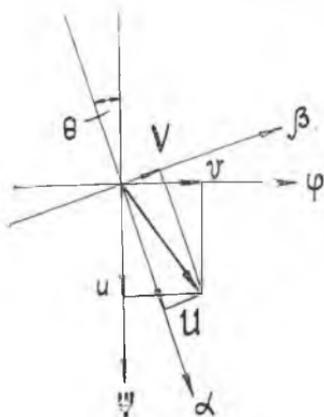


Рис. 8.

Далее, исходя из определения нормального перемещения, получаем:

$$w = W. \quad (17)$$

Наконец, для углов поворота нормали к срединной поверхности оболочки будем иметь следующие выражения (рис 9):

$$\gamma_1 = \vartheta_1 \cos \theta + \vartheta_2 \sin \theta;$$

$$\gamma_2 = -\vartheta_1 \sin \theta + \vartheta_2 \cos \theta \quad (18)$$

или

$$\vartheta_1 = \gamma_1 \cos \theta - \gamma_2 \sin \theta;$$

$$\vartheta_2 = \gamma_1 \sin \theta + \gamma_2 \cos \theta. \quad (19)$$

8. Выражения для усилий, моментов и перемещений в рассматриваемой оболочке представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= N_\alpha^0 + N_\alpha^*; & N_\beta &= N_\beta^0 + N_\beta^*; \\
 S_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta}^0 + S_{\alpha\beta}^*; \\
 Q_\alpha &= Q_\alpha^0 + Q_\alpha^*; & Q_\beta &= Q_\beta^0 + Q_\beta^*. & (20) \\
 M_\alpha &= M_\alpha^0 + M_\alpha^*; & M_\beta &= M_\beta^0 + M_\beta^*; \\
 H_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta}^0 + H_{\alpha\beta}^*; \\
 U &= U^0 + U^*; & V &= V^0 + V^*; \\
 W &= W^0 + W^*; & & (21) \\
 \gamma_1 &= \gamma_1^0 + \gamma_1^*; & \gamma_2 &= \gamma_2^0 + \gamma_2^*.
 \end{aligned}$$

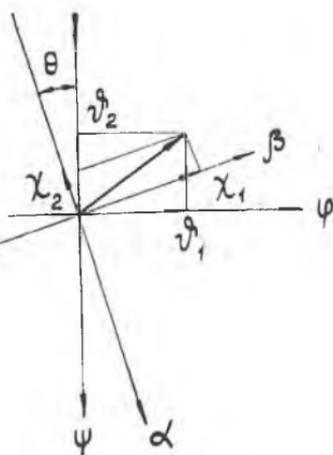


Рис. 9.

Здесь величины  $N_\alpha^0, \dots, \gamma_2^0$  вычисляются в системе  $(\alpha, \beta)$  с полюсом в точке  $B (\varphi = 0, \psi = \omega_0)$ , а  $N_\alpha^*, \dots, \gamma_2^*$  — в системе  $(\psi, \varphi)$ . Последние определяются краевым эффектом, связанным с краем  $\psi = \psi_1$ .

В развернутом виде будем иметь:

$$N_\alpha^0(N_\beta^0, Q_\alpha^0, M_\alpha^0, M_\beta^0) = \sum_{k=0}^{\infty} N_{\alpha k}^0(N_{\beta k}^0, Q_{\alpha k}^0, M_{\alpha k}^0, M_{\beta k}^0) \cos k\beta; \quad (22)$$

$$Q_\beta^0(S_{\alpha\beta}^0, H_{\alpha\beta}^0) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{\beta k}^0(S_{\alpha\beta k}^0, H_{\alpha\beta k}^0) \sin k\beta;$$

$$U^0(W^0, \gamma_1^0) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^0(W_k^0, \gamma_{1k}^0) \cos k\beta; \quad (23)$$

$$V^0(\gamma_2^0) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^0(\gamma_{2k}^0) \sin k\beta.$$

Формулы для вычисления  $N_{\alpha k}^0, \dots, \gamma_{2k}^0$  получаются из (2), (6) и (8), если в них перейти от аргумента  $\psi$  к аргументу  $\alpha$ , изменить  $n$  на  $k$  и, кроме того, положить  $C_{1k} = D_{1k} = 0$  (соответственно,  $A_{1k} = B_{1k} = 0$ ).

Усилия  $N_\alpha^*, N_\beta^*, S_{\alpha\beta}^*, Q_\alpha^*, Q_\beta^*$  и моменты  $M_\alpha^*, M_\beta^*, H_{\alpha\beta}^*$  находятся по формулам (14), в которых величины  $N_1, \dots, H$  следует заменить на  $N_1^*, \dots, H^*$ , определяемые рядами.

$$N_1^*(N_2^*, Q_1^*, M_1^*, M_2^*) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{1n}^*(N_{2n}^*, Q_{1n}^*, M_{1n}^*, M_{2n}^*) \cos n\varphi; \quad (24)$$

$$S^*(Q_2^*, H^*) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^*(Q_{2n}^*, H_n^*) \sin n\varphi.$$

Наконец, для перемещений  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$ ,  $\gamma_1^*$  и  $\gamma_2^*$  имеем по (15), (17) и (18)

$$U^* = u^* \cos \theta + v^* \sin \theta; \quad V^* = -u^* \sin \theta + v^* \cos \theta, \quad W^* = w^*; \quad (25)$$

$$\gamma_1^* = \vartheta_1^* \cos \theta + \vartheta_2^* \sin \theta; \quad \gamma_2^* = -\vartheta_1^* \sin \theta + \vartheta_2^* \cos \theta,$$

где

$$u^*(w^*, \vartheta_1^*) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(w_n^*, \vartheta_{1n}^*) \cos n\varphi;$$

$$v^*(\vartheta_2^*) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^*(\vartheta_{2n}^*) \sin n\varphi. \quad (26)$$

Величины  $N_{1n}^*$ , ...,  $H_n^*$ ,  $u_n^*$ , ...,  $\vartheta_{2n}^*$  находятся из формул (2), (6) и (8) при

$$C_{2n} = D_{2n} = 0; \quad C_n = D_n = 0; \quad C_n^* = D_n^* = 0.$$

9. В приведенные выше соотношения для усилий, моментов и перемещений входят постоянные  $C_{1n}$ ,  $D_{1n}$  ( $n \geq 0$ ),  $C_{2k}$ ,  $D_{2k}$ ,  $C_k$ ,  $C_k^*$  ( $k \geq 0$ ),  $D_k$ ,  $D_k^*$  ( $k \geq 1$ ), причем три из них ( $C_0$ ,  $C_1$  и  $D_1$ ) определяются из уравнений равновесия (13)

$$2C_0 = \frac{P_0}{2\pi R E \delta}; \quad C_1 + D_1 = -\frac{M_0 + PR \cos \alpha_0}{\pi R^2 E \delta (1 + \nu)}; \quad C_1 - D_1 = -\frac{P}{\pi R E \delta}$$

Остальные постоянные, как ранее было отмечено, находятся из граничных условий.

10. Запишем граничные условия для края  $\alpha = \alpha_0$ .

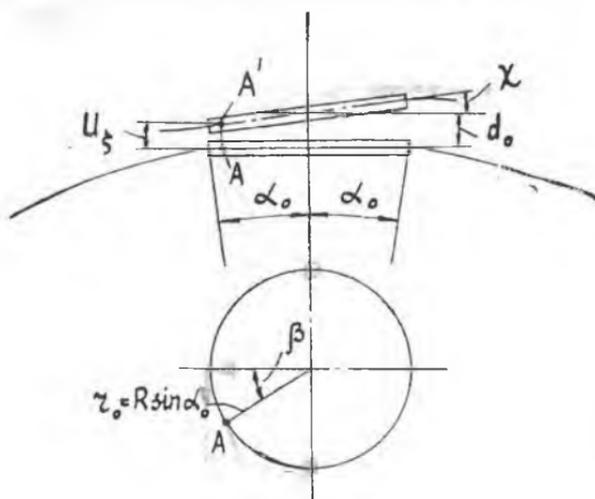


Рис. 10.

Так как по нашему предположению шайба является абсолютно жесткой, то можно записать, что при  $\alpha = \alpha_0$  (рис. 10)

$$U(\alpha_0, \beta) \cos \alpha_0 + W(\alpha_0, \beta) \sin \alpha_0 = d \cos \beta; \quad V(\alpha_0, \beta) = -d \sin \beta;$$

$$W(\alpha_0, \beta) \cos \alpha_0 - U(\alpha_0, \beta) \sin \alpha_0 = d_0 - R\lambda \sin \alpha_0 \cos \beta; \quad (27)$$

$$\chi_1(\alpha_0, \beta) = \chi \cos \beta.$$

Здесь  $d_0$ ,  $d$  и  $\chi$  — перемещения шайбы (нормальное и тангенциальное) и угол ее поворота.

В дальнейшем будем считать края оболочки  $\alpha = \alpha^0$  и  $\psi = \psi_1$  настолько удаленными друг от друга, что можно пренебречь взаимным влиянием краевых эффектов. Тогда условия (27) можно записать в виде следующей системы равенств:

$$U_0^0(\alpha_0) \cos \alpha_0 + W_0^0(\alpha_0) \sin \alpha_0 = 0;$$

$$W_0^0(\alpha_0) \cos \alpha_0 - U_0^0(\alpha_0) \sin \alpha_0 = d_0; \quad \gamma_{10}^0(\alpha_0) = 0; \quad (28)$$

$$U_1^0(\alpha_0) \cos \alpha_0 + W_1^0(\alpha_0) \sin \alpha_0 = d; \quad V_1^0(\alpha_0) = -d; \quad (29)$$

$$W_1^0(\alpha_0) \cos \alpha_0 - U_1^0(\alpha_0) \sin \alpha_0 = -R\lambda \sin \alpha_0; \quad \gamma_{11}^0(\alpha_0) = \lambda.$$

для  $k = 0, k = 1$  и

$$U_k^0(\alpha_0) \cos \alpha_0 + W_k^0(\alpha_0) \sin \alpha_0 = 0; \quad V_k^0(\alpha_0) = 0;$$

$$W_k^0(\alpha_0) \cos \alpha_0 - U_k^0(\alpha_0) \sin \alpha_0 = 0; \quad \gamma_{1k}^0(\alpha_0) = 0. \quad (30)$$

для  $k \geq 2$ .

11. Для записи граничных условий по нижнему краю оболочки  $\psi = \psi_1$  необходимо располагать выражениями для перемещений в системе  $(\psi, \varphi)$ . Подставляя в (16), (17) и (19) зависимости (21), получим:

$$u(\psi, \varphi) = u^* + U^0 \cos \theta - V^0 \sin \theta;$$

$$v(\psi, \varphi) = v^* + U^0 \sin \theta + V^0 \cos \theta;$$

$$w(\psi, \varphi) = w^* + W^0;$$

$$\vartheta_1(\psi, \varphi) = \vartheta_1^* + \chi_1^0 \cos \theta - \chi_2^0 \sin \theta$$

или

$$u(\psi, \varphi) = u^* + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k^0 \cos k\beta \cos \theta - V_k^0 \sin k\beta \sin \theta);$$

$$v(\psi, \varphi) = v^* + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k^0 \cos k\beta \sin \theta + V_k^0 \sin k\beta \cos \theta); \quad (31)$$

$$w(\psi, \varphi) = w^* + \sum_{k=0}^{\infty} W_k^0 \cos k\beta;$$

$$\vartheta_1(\psi, \varphi) = \vartheta_1^* + \sum_{k=0}^{\infty} (\chi_{1k}^0 \cos k\beta \cos \theta - \chi_{2k}^0 \sin k\beta \sin \theta).$$

Напомним, что  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  и  $\vartheta_1^*$  определяются формулами (26).

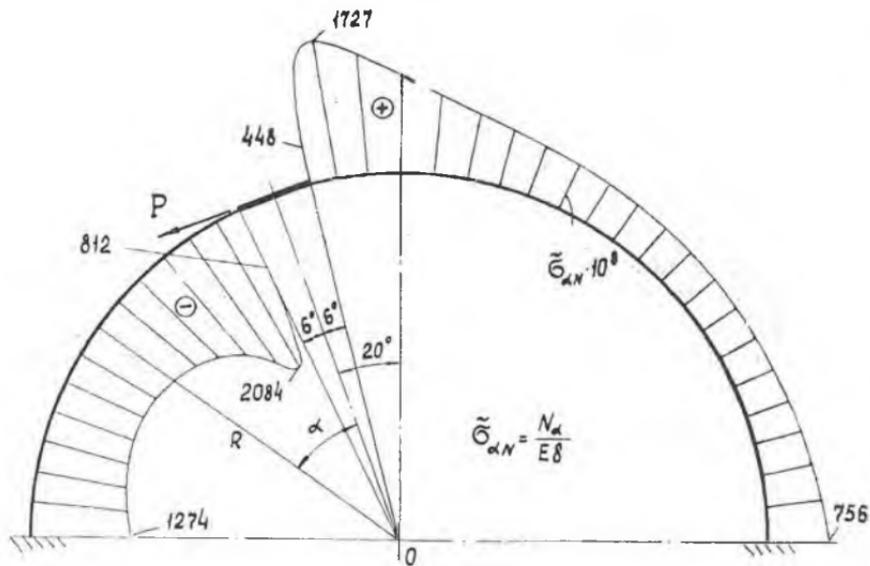


Рис. 11.

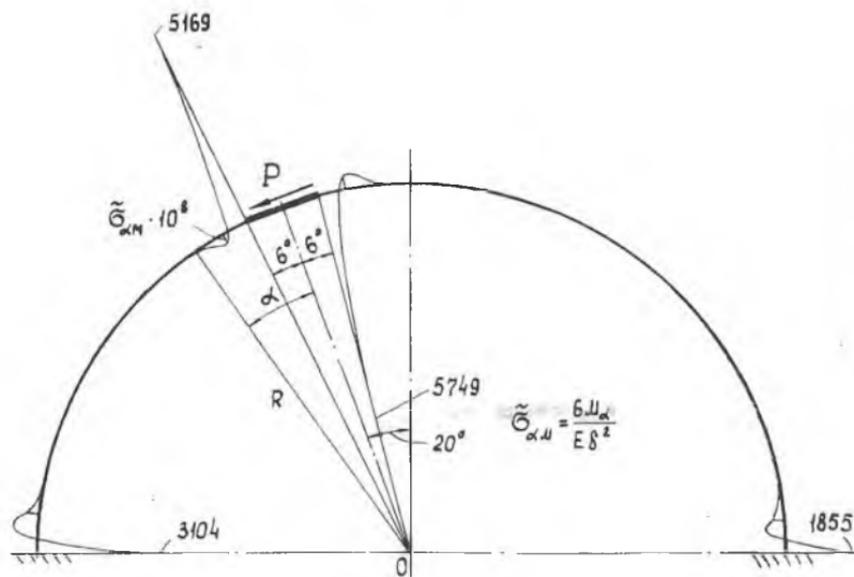


Рис. 12.

При фиксированном значении  $\psi$  выражения, стоящие под знаком суммирования в (31), представляют собой функции угла  $\varphi$ , которые можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{R} (U_k^0 \cos k\beta \cos \theta - V_k^0 \sin k\beta \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)}(\psi) \cos n\varphi;$$

$$\frac{1}{R} (U_k^0 \cos k\beta \sin \theta + V_k^0 \sin k\beta \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(\psi) \sin n\varphi;$$

$$\frac{1}{R} W_k^0 \cos k\beta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)}(\psi) \cos n\varphi;$$

$$\chi_{1k}^0 \cos k\beta \cos \theta - \chi_{2k}^0 \sin k\beta \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(k)}(\psi) \cos n\varphi.$$

Тогда для перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $\vartheta_1$ , будем иметь

$$\begin{aligned} u(\psi, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ u_n^*(\psi) + R \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{(k)}(\psi) \right] \cos n\varphi; \\ v(\psi, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ v_n^*(\psi) + R \sum_{k=0}^{\infty} B_n^{(k)}(\psi) \right] \sin n\varphi; \\ w(\psi, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ w_n^*(\psi) + R \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\psi) \right] \cos n\varphi; \\ \vartheta_1(\psi, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \vartheta_{1n}^*(\psi) + \sum_{k=0}^{\infty} D_n^{(k)}(\psi) \right] \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Эти выражения позволяют записать заданные в перемещениях граничные условия для края  $\psi = \psi_1$ .

Так, в случае жесткого защемления этого края будем иметь

$$\begin{aligned} u(\psi_1, \varphi) &= 0; & v(\psi_1, \varphi) &= 0; \\ w(\psi_1, \varphi) &= 0; & \vartheta_1(\psi_1, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

или

$$\begin{aligned} u_n^*(\psi_1) + R \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{(k)}(\psi_1) &= 0; & v_n^*(\psi_1) + R \sum_{k=0}^{\infty} B_n^{(k)}(\psi_1) &= 0; \\ w_n^*(\psi_1) + R \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\psi_1) &= 0; & \vartheta_{1n}^*(\psi_1) + \sum_{k=0}^{\infty} D_n^{(k)}(\psi_1) &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения (34) содержат бесконечное количество неизвестных  $C_{2k}$ ,  $D_{2k}$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  ( $k \geq 2$ ),  $C_k^*$ ,  $D_k^*$  ( $k \geq 0$ ) и  $C_{1n}$ ,  $D_{1n}$  ( $n \geq 0$ ). Выразив из уравнений (30) значения  $C_k$ ,  $D_k$ ,  $C_k^*$  и  $D_k^*$  через  $C_{1k}$  и  $D_{1k}$  и подставив результат в (34), можно получить бесконечную систему уравнений относительно  $C_{2k}$ ,  $D_{2k}$  и  $C_{1n}$ ,  $D_{1n}$ .

12. Приведем результаты численного расчета полусферической оболочки, нагруженной через жесткую шайбу касательной силой  $P$ .

Исходные данные:  $R = 150$  см,  $\delta = 0,3$  см,  $\alpha_0 = 6^\circ$ ,  $\omega_0 = 20^\circ$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $E = 7 \cdot 10^5 \text{ тн/см}^2$ ,  $P = 10000$  н.

\* Составление программы и сами расчеты на машине «Урал-2» были выполнены инж. И. А. Будячевским.

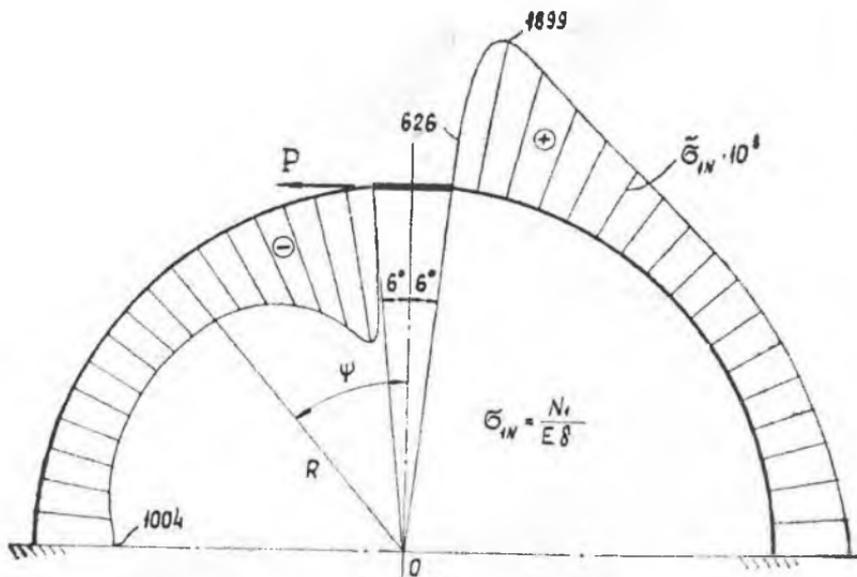


Рис. 13.

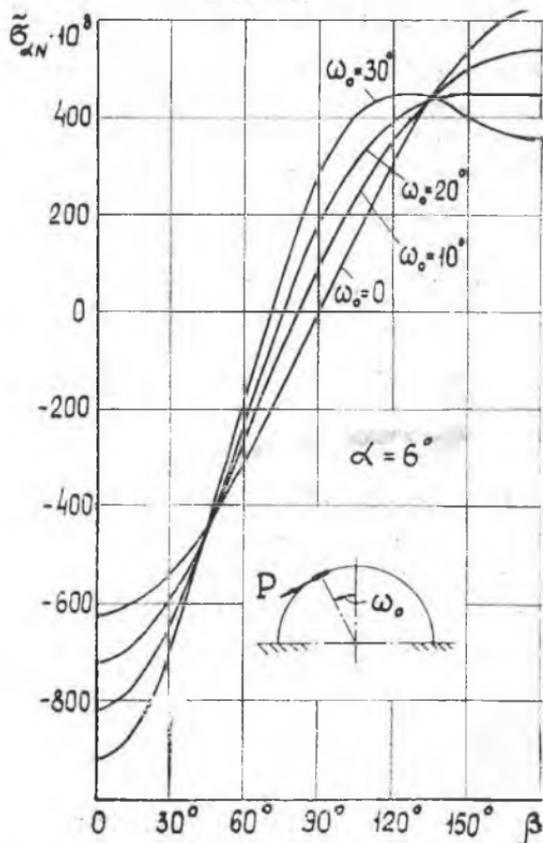


Рис. 14.

Расчеты проводились для случая жесткого заземления опорной параллели  $\psi = \psi_1 = \frac{\pi}{2}$ , причем граничные условия (33) удовлетворялись в отдельных ее точках. Результаты расчетов представлены на фиг. 11 и 12.

Для сравнения на рис. 13 показано распределение  $\sigma_{\alpha N}$  при нагружении оболочки касательной силой  $P = 10\,000$  н через шайбу, расположенную в вершине оболочки ( $\omega_0 = 0$ ). Сопоставление результатов приводит к выводу, что смещение шайбы от вершины оболочки значительно влияет на распределение напряжений.

Этот вывод подтверждается и рис. 14, где представлены графики распределения  $\sigma_{\alpha N}$  вдоль параллели  $\alpha = \alpha^0 = 6^\circ$  для различных углов  $\omega_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедьянов, И. С. Расчет сферических оболочек. Сб. статей «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций». Труды КуАИ, вып. 29, Куйбышев, 1967.
2. Степанов, Н. Н. Сферическая тригонометрия. Гостехиздат, 1948.
3. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, «Наука», 1968.

