КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

И. С. Ахмедьянов

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОБРАТНО СИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

В статье [1] рассмотрен метод расчета сферической оболочки при произвольном симметричном нагружении, доведенный до практически приемлемых расчетных формул. В настоящей статье излагается аналогичный метод расчета сферической оболочки на случай действия произвольной обратно симметричной нагрузки.

Принятые обозначения

x, y, z — подвижная система прямоугольных осей координат (начало координат на срединной поверхности сферической оболочки);
ψ, φ — криволинейные координаты точки срединной поверхности оболочки (ψ — полярное расстояние, φ — долгота);
R — радиус срединной поверхности оболочки;
δ — толщина оболочки;
u, v, w — проекции вектора полного перемещения точки срединной поверхности оболочки на оси x, y, z;
E — модуль упругости материала оболочки;
μ — коэффициент Пуассона;
N_1, N_2 — нормальные усилия;
S — сдвигающее усилие;
Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия;
M_1, M_2 — изгибающие моменты;
H — крутящий момент;
q_x, q_y, q_z — проекции распределенной поверхности нагрузки на оси x, y, z.

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \lambda^2 = 12(1-\mu^2)\frac{R^2}{\delta^2} - \mu^2,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{1}{\sin^2\psi}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

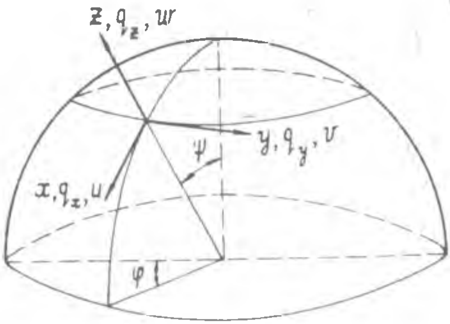
$$l_n = \frac{d^2}{d\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi\frac{d}{d\psi} - \frac{n^2}{\sin^2\psi} + 1.$$

1. Решение задачи об определении внутренних усилий и моментов в сферической оболочке при произвольном нагружении можно свести к интегрированию следующей системы трех уравнений с тремя неизвестными [1, 3]:

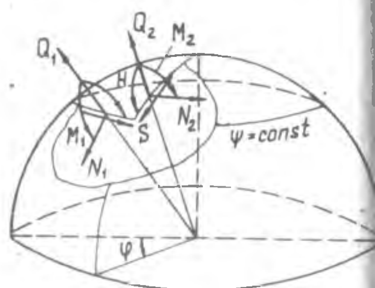
$$\nabla^2\sigma + (1 + i\lambda)\,\sigma = \Phi_q + i\Omega_q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\psi} + 2W\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial Z}{\partial\varphi} = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial\psi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1 + i\lambda}Rq_x, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\psi} + 2Z\operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial W}{\partial\varphi} = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial\sigma}{\partial\psi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1 + i\lambda}Rq_y. \tag{3}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Здесь

$$\sigma = N + \frac{\mu-i\lambda}{1+\mu}\frac{M}{R},\quad W = X - \frac{\mu-i\lambda}{1-\mu}\frac{U}{R},\quad Z = Y - \frac{\mu-i\lambda}{1-\mu}\frac{V}{R}, \tag{4}$$

где, в свою очередь,

$$N = N_1 + N_2,\quad X = N_1 - N_2,\quad Y = 2S, \tag{5}$$

$$M = M_1 + M_2,\quad U = M_1 - M_2,\quad V = 2H. \tag{6}$$

Кроме того, в уравнении (1)

$$\Phi_q = -(1+\mu)R\left(\frac{\partial q_x}{\partial\psi} + q_x\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial q_y}{\partial\varphi}\right) + Rq_z,\quad \Omega_q = \lambda Rq_z. \tag{7}$$

Принятая система координат, а также положительные направления внешних нагрузок q_x, q_y, q_z, внутренних усилий и моментов показаны на фиг. 1 и 2.

2. При обратно симметричном нагружении оболочки компоненты поверхностной нагрузки можно представить в виде тригонометрических рядов:

$$q^x = \sum_{n=1}^{\infty} q_{xn}(\psi)\sin n\varphi,\quad q_y = \sum_{n=0}^{\infty} q_{yn}(\psi)\cos n\varphi,\quad q_z = \sum_{n=1}^{\infty} q_{zn}(\psi)\sin n\varphi. \tag{8}$$

При этом правая часть уравнения (1) примет вид:

$$\Phi_q + i\Omega_q = \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{qn} + i\Omega_{qn}) \sin n\varphi. \tag{9}$$

Здесь

$$\Phi_{qn} = -(1+\mu) R \left(\frac{dq_{xn}}{d\psi} + q_{xn} \operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi} q_{yn}\right) + Rq_{zn},\ \Omega_{qn} = \lambda R q_{zn}.$$

В соответствии с (9), общим решением уравнения (1) будет ряд

$$\sigma(\psi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(\psi) \sin n\varphi, \tag{10}$$

в котором функция $\sigma_n(\psi)$ удовлетворяет уравнению

$$l_n(\sigma_n) + i\lambda\sigma_n = \Phi_{qn} + i\Omega_{qn}. \tag{11}$$

Запишем его общее решение:

$$\sigma_n = \sigma_{on} + \sigma_{qn}. \tag{12}$$

Здесь σ_{qn} — частное решение, σ_{on} — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$l_n(\sigma_{on}) + i\lambda\sigma_{on} = 0. \tag{13}$$

Воспользовавшись решением уравнения (13), найденным в [3], получим

$$\sigma_n = i\frac{\lambda D}{R^2} [(A_{n1} - iB_{n1})(p_{n1} + iq_{n1}) + (A_{n2} - iB_{n2})(p_{n2} + iq_{n2})] + \sigma_{qn}. \tag{14}$$

Здесь

$$p_{n1}(\psi) = \sigma_{n1} - \lambda\tau_{n1} \quad q_{n1}(\psi) = \tau_{n1} + \lambda\sigma_{n1}, \tag{15}$$

$$p_{n2}(\psi) = \sigma_{n2} - \lambda\tau_{n2}, \quad q_{n2}(\psi) = \tau_{n2} + \lambda\sigma_{n2}. \tag{16}$$

Функции σ_{n1}, σ_{n2} и τ_{n1}, τ_{n2} представляют собой действительные и мнимые части двух линейно независимых частных решений y_{n1} и y_{n2} однородного уравнения (13) [3]:

$$y_{n1} = \sigma_{n1} + i\tau_{n1}, \quad y_{n2} = \sigma_{n2} + i\tau_{n2}. \tag{17}$$

A_{n1}, B_{n1}, A_{n2}, B_{n2} — произвольные постоянные.

3. Переходя к уравнениям (2) и (3), записываем в соответствии с (10) и (8):

$$W(\psi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\psi) \sin n\varphi, \quad Z(\psi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\psi) \cos n\varphi. \tag{18}$$

Подставляя (18) и (10) в (2) и (3), находим

$$\frac{dW_n}{d\psi} + 2W_n \operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi} Z_n = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} \frac{d\sigma_n}{d\psi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1+i\lambda} Rq_{xn}, \tag{19}$$

$$\frac{dZ_n}{d\psi} + 2Z_n \operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi} W_n = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} \frac{n}{\sin\psi} \sigma_n + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1+i\lambda} Rq_{yn}. \tag{20}$$

Интегрирование этой системы приводит нас к решению

$$W_n=\frac{1}{2\sin^2\psi}\left[(a_n+ib_n)\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}+(c_n+id_n)\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right]-$$
$$-i\frac{\lambda D}{R^2}\left[(A_{n1}-iB_{n1})(r_{n1}+is_{n1})+(A_{n2}-iB_{n2})(r_{n2}+is_{n2})\right]+W_{qn}. \quad (21)$$

$$Z_n=\frac{1}{2\sin^2\psi}\left[(a_n+ib_n)\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}-(c_n+id_n)\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right]+$$
$$+i\frac{\lambda D}{R^2}\left[(A_{n1}-iB_{n1})(\lambda_{n1}+i\mu_{n1})+(A_{n2}-iB_{n2})(\lambda_{n2}+i\mu_{n2})\right]+Z_{qn}, \quad (22)$$

в котором

$$r_{n1}(\psi)=g_{n1}+p_{n1},\quad s_{n1}(\psi)=h_{n1}+q_{n1}, \quad (23)$$

$$g_{n1}(\psi)=2\left(\frac{d\sigma_{n1}}{d\psi}\operatorname{ctg}\psi-\frac{n^2}{\sin^2\psi}\sigma_{n1}\right),\quad h_{n1}(\psi)=2\left(\frac{d\tau_{n1}}{d\psi}\operatorname{ctg}\psi-\frac{n^2}{\sin^2\psi}\tau_{n1}\right), \quad (24)$$

$$\lambda_{n1}(\psi)=\frac{2n}{\sin\psi}\left(\sigma_{n1}\operatorname{ctg}\psi-\frac{d\sigma_{n1}}{d\psi}\right),\quad \mu_{n1}(\psi)=\frac{2n}{\sin\psi}\left(\tau_{n1}\operatorname{ctg}\psi-\frac{d\tau_{n1}}{d\psi}\right), \quad (25)$$

W_{qn} и Z_{qn} — частное решение неоднородной системы, которая получается из уравнений (19)—(20), если в них положить $\sigma_n=\sigma_{qn}$; a_n, b_n, c_n, d_n — произвольные постоянные. Значения функций r_{n2}, s_{n2}, g_{n2}, h_{n2}, λ_{n2} и μ_{n2} вычисляются по формулам, получаемым из (23)—(25) изменением индекса 1 на 2. Это замечание следует иметь в виду и для последующих аналогичных формул.

4. Располагая решениями (14), (21) и (22) уравнений (11), (19) и (20), легко находим выражения для усилий и моментов исходя из (4)—(6), (10), (14), (18), (21) и (22):

$$N_1=\sum_{n=1}^{\infty}N_{1n}(\psi)\sin n\varphi,\quad N_2=\sum_{n=1}^{\infty}N_2\ (\psi)\sin n\varphi,\quad S=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(\psi)\cos n\varphi, \quad (26)$$

$$M_1=\sum_{n=1}^{\infty}M_{1n}(\psi)\sin n\varphi,\quad M_2=\sum_{n=1}^{\infty}M_{2n}(\psi)\sin n\varphi,\quad H=\sum_{k=0}^{\infty}H_n(\psi)\cos n\varphi. \quad (27)$$

В этих формулах

$$N_{1n}=-\frac{D}{2R^2}(C_{n1}g_{n1}+D_{n1}h_{n1}+C_{n2}g_{n2}+D_{n2}h_{n2})+$$
$$+\frac{1}{2\sin^2\psi}\left(C_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}+D_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)+\frac{1}{2}(N_{qn}+X_{qn}), \quad (28)$$

$$N_{2n}=\frac{D}{2R^2}(C_{n1}\alpha_{n1}+D_{n1}\beta_{n1}+C_{n2}\alpha_{n2}+D_{n2}\beta_{n2})-$$
$$-\frac{1}{2\sin^2\psi}\left(C_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}+D_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)+\frac{1}{2}(N_{qn}-X_{qn}), \quad (29)$$

$$S_n=-\frac{D}{2R^2}(C_{n1}\lambda_{n1}+D_{n1}\mu_{n1}+C_{n2}\lambda_{n2}+D_{n2}\mu_{n2})+$$
$$+\frac{1}{2\sin^2\psi}\left(C_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}-D_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right)+\frac{1}{2}Y_{qn}, \quad (30)$$

$$M_{1n} = -\frac{D}{2R}(A_{n1}\gamma_{n1} + B_{n1}\delta_{n1} + A_{n2}\gamma_{n2} + B_{n2}\delta_{n2}) +$$

$$+ \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(A_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2} + B_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}(M_{qn} + U_{qn}), \qquad (31)$$

$$M_{2n} = \frac{D}{2R}(A_{n1}\zeta_{n1} + B_{n1}\eta_{n1} + A_{n2}\zeta_{n2} + B_{n2}\eta_{2}) -$$

$$- \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(A_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2} + B_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}(M_{qn} - U_{qn}), \qquad (32)$$

$$H_n = -\frac{(1-\mu)D}{2R}(A_{n1}\lambda_{n1} + B_{n1}\mu_{n1} + A_{n2}\lambda_{n2} + B_{n2}\mu_{n2}) +$$

$$+ \frac{1}{2\sin^2\psi}\left(A_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2} - B_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{2}V_{qn}, \qquad (33)$$

причем

$$\alpha_{n1}(\psi) = g_{n1} + 2p_{n1}, \quad \beta_{n1}(\psi) = h_{n1} + 2q_{n1}, \qquad (34)$$

$$\gamma_{n1}(\psi) = (1-\mu)g_{n1} + 2p_{n1}, \quad \delta_{n1}(\psi) = (1-\mu)h_{n1} + 2q_{n1}, \qquad (35)$$

$$\zeta_{n1}(\psi) = (1-\mu)g_{n1} - 2\mu p_{n1}, \quad \eta_{n1}(\psi) = (1-\mu)h_{n1} - 2\mu q_{n1}, \qquad (36)$$

$$C_{n1} = \mu A_{n1} + \lambda B_{n1}, \quad D_{n1} = \mu B_{n1} - \lambda A_{n1}. \qquad (37)$$

A_{n0}, B_{n0}, C_{n0}, D_{n0} — произвольные постоянные, введенные взамен a_n, b_n, c_n и d_n, причем

$$A_{00} = -B_{00}, \quad C_{00} = -D_{00}.$$

Значения функций N_{qn}, M_{qn}, X_{qn}, Y_{qn}, U_{qn} и V_{qn} определяются из соотношений

$$N_{qn} + \frac{\mu - i\lambda}{1+\mu}\frac{M_{qn}}{R} = \sigma_{qn}, \quad X_{qn} - \frac{\mu - i\lambda}{1-\mu}\frac{U_{qn}}{R} = W_{qn}, \quad Y_{qn} - \frac{\mu - i\lambda}{1-\mu}\frac{V_{qn}}{R} = Z_{qn}. \qquad (38)$$

Для перерезывающих усилий Q_1 и Q_2 будем иметь

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n}(\psi)\sin n\varphi, \quad Q_2 = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}(\psi)\cos n\varphi. \qquad (39)$$

Имея в виду, что [1, 3]

$$Q_1 = -\frac{1-\mu}{1+\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(N - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_x,$$

$$Q_2 = -\frac{1-\mu}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(N - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_y,$$

на основании (5), (6), (8), (26)—(29), (31) и (32), получим

$$Q_{1n} = -\frac{D}{R^2}\left(C_{n1}\frac{d\sigma_{n1}}{d\psi} + D_{n1}\frac{d\tau_{n1}}{d\psi} + C_{n2}\frac{d\sigma_{n2}}{d\psi} + D_{n2}\frac{d\tau_{n2}}{d\psi}\right) -$$

$$- \frac{1-\mu}{1+\lambda^2}\frac{d}{d\psi}\left(N_{qn} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\frac{M_{qn}}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_{xn}, \qquad (40)$$

$$Q_{2n} = -\frac{nD}{R^2 \sin\psi}(C_{n1}\sigma_{n1} + D_{n1}\tau_{n1} + C_{n2}\sigma_{n2} + D_{n2}\tau_{n2}) -$$

$$-\frac{n(1-\mu)}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\left(N_{qn} - \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\,\frac{M_{qn}}{R}\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2} R q_{yn}. \quad (41)$$

5. Перейдем, далее, к определению перемещений. Для этого воспользуемся уравнениями [3]

$$\frac{\partial u}{\partial\psi} - u\operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial v}{\partial\varphi} = \frac{(1+\mu)R}{E\delta}(N_1 - N_2), \quad (42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial\psi} - v\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{2(1+\mu)R}{E\delta} S, \quad (43)$$

$$w = \frac{(1-\mu)R}{2E\delta}(N_1 + N_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi} + u\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right). \quad (44)$$

Записав

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\psi)\sin n\varphi, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\psi)\cos n\varphi, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\psi)\sin n\varphi, \quad (45)$$

из (42)—(53) легко получаем

$$\frac{du_n}{d\psi} - u_n\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi} v_n = \frac{(1+\mu)R}{E\delta}(N_{1n} - N_{2n}), \quad (46)$$

$$\frac{dv_n}{d\psi} - v_n\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi} u_n = \frac{2(1+\mu)R}{E\delta} S_n, \quad (47)$$

$$w_n = \frac{(1-\mu)R}{2E\delta}(N_{1n} + N_{2n}) - \frac{1}{2}\left(\frac{du_n}{d\psi} + u_n\operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi} v_n\right). \quad (48)$$

Подставим в (46) и (47) вместо N_{1n}, N_{2n} и S_n их выражения по (28)—(30). В результате интегрирования получившейся системы имеем

$$u_n = \frac{(1+\mu)D}{E\delta R}\left(C_{n1}\frac{d\sigma_{n1}}{d\psi} + D_{n1}\frac{d\tau_{n1}}{d\psi} + C_{n2}\frac{d\sigma_{n2}}{d\psi} + D_{n2}\frac{d\tau_{n2}}{d\psi}\right) +$$

$$+\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}(C_{n0}z_n + D_{n0}y_n) + \frac{R}{2}\left(C^*_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} + D^*_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi + u_{qn}, \quad (49)$$

$$v_n = \frac{n(1+\mu)D}{E\delta R\sin\psi}(C_{n1}\sigma_{n1} + D_{n1}\tau_{n1} + C_{n2}\sigma_{n2} + D_{n2}\tau_{n2}) +$$

$$+\frac{(1+\mu)R}{2E\delta}(C_{n0}z_n - D_{n0}y_n) + \frac{R}{2}\left(C^*_{n0}\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2} - D^*_{n0}\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi + v_{qn}. \quad (50)$$

Здесь

$$y_n = -\frac{1}{2n(n^2-1)}\left[\frac{2n(n-\cos\psi)}{\sin\psi} - \sin\psi\right]\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}, \quad (51)$$

$$z_n = \frac{1}{2n(n^2-1)}\left[\frac{2n(n+\cos\psi)}{\sin\psi} - \sin\psi\right]\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}, \quad (52)$$

для $n \geqslant 2$ и

$$y_1 = \frac{1}{2}\left[(1-\cos\psi)\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + \frac{3}{4}(1-\cos\psi) - \frac{1}{1-\cos\psi} - 1\right], \quad (53)$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[(1+\cos\psi)\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \frac{3}{4}(1+\cos\psi) + \frac{1}{1+\cos\psi} + 1\right], \quad (54)$$

$$y_0 = z_0 = \sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi, \quad (55)$$

для $n=1$ и $n=0$;

u_{qn}, v_{qn} — частное решение неоднородной системы, которая получается из уравнений (46)—(47), если в них принять

$$N_{1n} - N_{2n} = X_{qn} \quad 2S_n = Y_{qn}$$

C^*_{n0}, D^*_{n0} — произвольные постоянные. При $n = 0$

$$C^*_{00} = -D^*_{00},$$

Используя выражения (28), (29), (49) и (50), по (48) найдем:

$$w_n = \frac{D}{E\delta R}(C_{n1}p_{n1} + D_{n1}q_{n1} + C_{n2}p_{n2} + D_{n2}q_{n2}) +$$

$$+R\left(A^*_{n0}Q^n_1 + B^*_{n0}P^n_1\right) + w_{qn}. \quad (56)$$

В этой формуле

$$P^n_1 = (n+\cos\psi)\operatorname{tg}^n\frac{\psi}{2}, \quad Q^n_1 = (n-\cos\psi)\operatorname{ctg}^n\frac{\psi}{2}. \quad (57)$$

для $n \geqslant 2$ и

$$P^1_1 = -\sin\psi, \quad Q^1_1 = \sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi, \quad (58)$$

$$P^0_1 = \cos\psi, \quad Q^0_1 = -1 - \cos\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} \quad (59)$$

для $n=1$ и $n=0$;

$$A^*_{n0} = \frac{1}{2}C^*_{n0} + \frac{1+\mu}{4E\delta n(n^2-1)}D_{n0}, \quad B^*_{n0} = -\frac{1}{2}D^*_{n0} + \frac{1+\mu}{4E\delta n(n^2-1)}C_{n0}, \quad (60)$$

$$A^*_{10} = \frac{1+\mu}{4E\delta}(C_{10} - D_{10}), \quad B^*_{10} = \frac{1}{2}\left(D^*_{10} - C^*_{10}\right) + \frac{3(1+\mu)}{16E\delta}(C_{10}+D_{10}), \quad (61)$$

$$A^*_{00} = B^*_{00} = 0,$$

для $n=1$ и $n=0$;

$$w_{qn} = \frac{(1-\mu)R}{2E\delta}N_{qn} - \frac{(1+\mu)R}{2E\delta}X_{qn} - u_{qn}\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin n}v_{qn}. \quad (62)$$

6. В выражения (28)—(33), (49), (50) и (56) входят 6 постоянных A_{n0}, B_{n0}, C_{n0}, D_{n0} C^*_{n0} и D^*_{n0}. Так как число произвольных постоянных не может быть более четырех, то между A_{n0}, B_{n0}, C_{n0}, D_{n0}, C^*_{n0} и D^*_{n0} должна существовать определенная зависимость. Сопоставляя выражения для компонентов деформации ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ и ω срединной поверхности оболочки, найденные по усилиям и моментам

с одной стороны, и по перемещениям, с другой, придем к следующим зависимостям:

$$A_{n0} = \frac{n(n^2-1)(1-\mu)D}{R} D_{n0}^* + \frac{(1-\mu^2)D}{2E\delta R} C_{n0}, \tag{63}$$

$$B_{n0} = -\frac{n(n^2-1)(1-\mu)D}{R} C_{n0}^* + \frac{(1-\mu^2)D}{2E\delta R} D_{n0}, \tag{64}$$

для $n \geqslant 2$ и

$$A_{10} = B_{10} = \frac{(1-\mu^2)D}{2E\delta R}(C_{10} + D_{10}) \tag{65}$$

для $n = 1$.

Таким образом, независимыми произвольными постоянными будут C_{n0}, D_{n0}, C_{n0}^* и D_{n0}^*.

7. В статье [3] частные решения y_{n1} и y_{n2} уравнения (13) были представлены через гипергеометрические ряды, которые в случае очень тонких оболочек имеют неудовлетворительную сходимость. Вследствие этого в практических расчетах целесообразно пользоваться приближенными выражениями для y_{n1} и y_{n2}, которые могут быть получены, например, следующим образом.

Полагая

$$\sigma_{0n} = \frac{\tau_n}{\sqrt{\sin\psi}}, \tag{66}$$

находим

$$\frac{d^2\tau_n}{d\psi^2} - \left(\frac{4n^2-1}{4\sin^2\psi} - \frac{5}{4} - i\lambda\right)\tau_n = 0. \tag{67}$$

Приближенное решение этого уравнения, «затухающее» по мере удаления от верхнего края оболочки ($\psi = \alpha$, фиг. 3), получим, пренебрегая изменяемостью коэффициента при τ_n [2]. Принимая этот коэффициент равным его значению при $\psi = \alpha$, будем иметь взамен (67)

$$\frac{d^2\tau_n}{d\psi^2} - (a_n - i\lambda)\tau_n = 0. \tag{68}$$

Здесь

$$a_n = \frac{4n^2-1}{4\sin^2\alpha} - \frac{5}{4}. \tag{69}$$

Проинтегрировав уравнение (68), придем к следующему выражению для y_{n2}:

$$y_{n2} = \frac{e^{-\alpha_n\Theta}}{\sqrt{\sin\varphi}}(\cos\beta_n\Theta, + i\sin\beta_n\Theta).$$

Отсюда

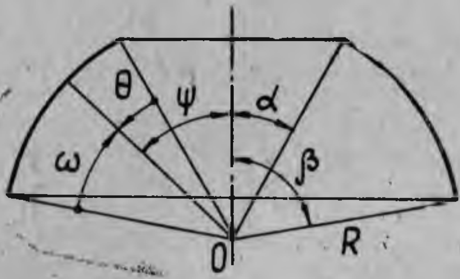
$$\sigma_{n2} = \frac{e^{-\alpha_n\Theta}}{\sqrt{\sin\psi}}\cos\beta_n\Theta, \quad \tau_{n2} = \frac{e^{-\alpha_n\Theta}}{\sqrt{\sin\psi}}\sin\beta_n\Theta. \tag{70}$$

Здесь

$$\Theta = \psi - \alpha, \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{\sqrt{a_n^2+\lambda^2}+a_n}{2}}, \quad \beta_n = \frac{\lambda}{2\alpha_n}. \tag{71}$$

Второе частное решение уравнения (13), «затухающее» при удалении от нижнего края оболочки $\psi=\beta$, имеет вид

$$y_{n1}=\frac{e^{-\gamma_n\omega}}{\sqrt{\sin\psi}}(\cos\delta_n\omega+i\sin\delta_n\omega).$$



Фиг. 3.

Отсюда

$$\sigma_{n1}=\frac{e^{-\gamma_n\omega}}{\sqrt{\sin\psi}}\cos\delta_n\omega,\quad \tau_{n1}=\frac{e^{-\gamma_n\omega}}{\sqrt{\sin\psi}}\sin\delta_n\omega, \tag{72}$$

где

$$\omega=\beta-\psi,\quad \gamma_n=\sqrt{\frac{\sqrt{b_n^2+\lambda^2}+b_n}{2}},\quad \delta_n=\frac{\lambda}{2\gamma_n}, \tag{73}$$

причем

$$b_n=\frac{4n^2-1}{4\sin^2\beta}-\frac{5}{4}. \tag{74}$$

Дифференцируя (72) и (70) по ψ, получим

$$\frac{d\sigma_{n1}}{d\psi}=\left(\gamma_n-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi\right)\sigma_{n1}+\delta_n\tau_{n1}, \tag{75}$$

$$\frac{d\tau_{n1}}{d\psi}=\left(\gamma_n-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi\right)\tau_{n1}-\delta_n\sigma_{n1}, \tag{76}$$

$$\frac{d\sigma_{n2}}{d\psi}=-\left(\alpha_n+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi\right)\sigma_{n2}-\beta_n\tau_{n2}, \tag{77}$$

$$\frac{d\tau_{n2}}{d\psi}=-\left(\alpha_n+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi\right)\tau_{n2}+\beta_n\sigma_{n2}. \tag{78}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Гольденвейзер. Исследование напряженного состояния сферической оболочки, ПММ, т. VIII, в. 6, 1944.
2. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
3. И. С. Ахмедьянов. Расчет сферических оболочек. «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций». Труды КуАИ, в. 29, Куйбышев, 1967.