

И. С. АХМЕДЬЯНОВ, В. В. ГОРБАТЕНКО

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ВОКРУГ ЖЕСТКОЙ ШАЙБЫ

Будем рассматривать напряженное состояние сферической оболочки с жесткой круглой шайбой и подкреплением (рис. 1). Подкрепление, изготовленное из того же материала, что и основная оболочка, представляет собой кольцо в виде пояса сферической оболочки толщиной δ_0 , охватывающее шайбу ($\delta_0 > \delta$, δ — толщина основной оболочки). Предполагается, что радиусы средних поверхностей оболочки и подкрепления одинаковы. Система нагружена силой и моментом, приложенными к шайбе и действующими в некоторой меридиональной плоскости.

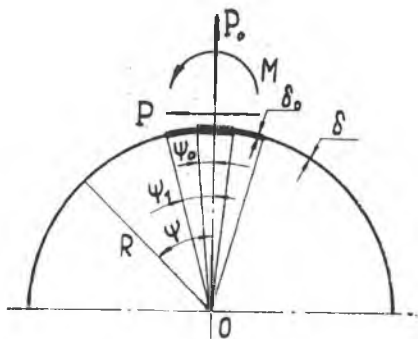


Рис. 1.

Для решения задачи используем основные соотношения, приведенные в [1].

§ 1. Расчет оболочки на действие радиальной силы P_0

1. Исследуемая оболочка показана на рис. 1 ($P_0 \neq 0$, $P = 0$, $M = 0$). Закрепление оболочки по нижнему краю принимаем

произвольным (но обеспечивающим осесимметричность напряженного и деформированного состояния).

Для усилий, моментов и перемещений, возникающих в основной оболочке, сохраним обозначения, принятые в [1]. Что касается подкрепления, то для него будем применять несколько измененные обозначения, приведенные ниже.

При нагружении радиальной силой P_0 напряженное состояние рассматриваемой системы будет осесимметричным ($n=0$). В соответствии с этим можно, воспользовавшись формулами (1), (2) и (3) из [1], получить следующие соотношения, определяющие нормальные напряжения в основной оболочке вблизи подкрепления (для сокращения записей всюду у букв опускаем второй индекс 0):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{1,N} &= \frac{N_1}{\delta \sigma^0} = -k(C_2 g_2 + D_2 h_2) + \frac{1}{\sin^2 \psi}; \\ \tilde{\sigma}_{2,N} &= \frac{N_2}{\delta \sigma^0} = -k(C_2 \alpha_2 + D_2 \beta_2) - \frac{1}{\sin^2 \psi}; \\ \tilde{\sigma}_{1,M} &= \frac{6M_1}{\delta^2 \sigma^0} = -6km(A_2 \gamma_2 + B_2 \delta_2); \\ \tilde{\sigma}_{2,M} &= \frac{6M_2}{\delta^2 \sigma^0} = 6km(A_2 \zeta_2 + B_2 \tau_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь

$$c^0 = \frac{P_0}{2\pi R \delta}, \quad k = \gamma \frac{E}{\sigma_0},$$

C_2, D_2 — постоянные интегрирования.

Выражения для функций g_2, h_2, \dots, ζ_2 и η_2 получаются из формул (3) статьи [1], если в них изменить первый индекс 1 на индекс 2 и принять $n=0$ (второй индекс 0 затем опускается).

При малых относительных размерах шайбы и подкрепления часть основной оболочки, прилегающая к подкреплению, является полой. Поэтому в качестве приближенных зависимостей для функций σ_{20} и τ_{20} можно принять функции Томсона [2, 3, 4]:

$$\sigma_{20} = \ker x, \quad \tau_{20} = -\ker i x,$$

где

$$x = \sqrt{\lambda} \psi.$$

Тогда

$$\dot{\sigma}_{20} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dx} \ker x; \quad \dot{\tau}_{20} = -\sqrt{\lambda} \frac{d}{dx} \ker i x.$$

2. Напряженное состояние подкрепления, которое принимаем за пояс сферической оболочки радиуса R и толщины δ_0 , будет определяться формулами [1]:

$$\tilde{\sigma}_{1,N} = \frac{N_1}{\delta_0 \sigma^0} = -k_0(c_i g_i + d_i h_i) + \frac{\nu}{\sin^2 \psi};$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{2N} &= \frac{N_2}{\delta_0 \sigma^0} = k_0(c_i \alpha_i + d_i \beta_i) - \frac{\nu}{\sin^2 \psi}; \\ \bar{\sigma}_{1M} &= \frac{6M_1}{\delta_0^2 \sigma^0} = -6k_0 m_0 (a_i \gamma_i + b_i \delta_i); \\ \bar{\sigma}_{2M} &= \frac{6M_2}{\delta_0^2 \sigma^0} = 6k_0 m_0 (a_i \zeta_i + b_i \eta_i).\end{aligned}\quad (2)$$

Выражения, стоящие в скобках, записаны по следующему правилу сокращенного письма, которым будем пользоваться и в дальнейшем:

$$a_i \nu_i + b_i \xi_i = a_1 \nu_1 + b_1 \xi_1 + a_2 \nu_2 + b_2 \xi_2.$$

Кроме того, в формулах (2) использованы обозначения

$$k_0 = \gamma_0 \frac{E}{\sigma^0}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{24m_0^2(1-\mu^2)}; \quad m_0 = \frac{R}{\delta_0}; \quad \nu = \frac{\delta}{\delta_0}.$$

c_i, d_i ($i = 1, 2$) — произвольные постоянные (аналогичные C_i и D_i для основной оболочки).

$$\begin{aligned}a_i &= 2\gamma_0(\mu c_i - \lambda_0 d_i); \quad b_i = 2\gamma_0(\mu d_i + \lambda_0 c_i); \\ \lambda_0^2 &= 12m_0^2(1-\mu^2) - \mu^2.\end{aligned}$$

Значения функций g_1, h_1, \dots, ξ_2 и η_2 для расчета подкрепления можно вычислить по соответствующим формулам из [1], приняв $n=0, \lambda=\lambda_0$ и

$$\begin{aligned}\sigma_{10} &= ber x; \quad \tau_{10} = -bei x; \\ \sigma_{20} &= ker x; \quad \tau_{20} = -kei x,\end{aligned}$$

где

$$x = \sqrt{\lambda_0} \phi.$$

При этом будет

$$\begin{aligned}\sigma'_{10} &= \sqrt{\lambda_0} \frac{d}{dx} ber x; \quad \tau'_{10} = -\sqrt{\lambda_0} \frac{d}{dx} bei x; \\ \sigma'_{20} &= \sqrt{\lambda_0} \frac{d}{dx} ker x; \quad \tau'_{20} = -\sqrt{\lambda_0} \frac{d}{dx} kei x.\end{aligned}$$

3. Для определения постоянных C_2, D_2, c_1, d_1, c_2 и d_2 имеем следующие условия:

$$\begin{aligned}1) \quad u_r(\phi_0) &= 0; & 2) \quad \vartheta_1(\phi_0) &= 0; \\ 3) \quad u_r(\phi_1 - 0) &= u_r(\phi_1 + 0); & 4) \quad \vartheta_1(\phi_1 - 0) &= \vartheta_1(\phi_1 + 0); \\ 5) \quad M_1(\phi_1 - 0) &= M_1(\phi_1 + 0); & 6) \quad N_1(\phi_1 - 0) &= N_1(\phi_1 + 0).\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь u_r — радиальное перемещение точки срединной поверхности оболочки, определяемое равенством:

$$u_r = u \cos \phi + w \sin \phi.$$

Если принять, что нижний край оболочки достаточно удален от края $\psi = \psi_1$, то условия (3) дадут следующую систему уравнений в 6 неизвестными:

$$\begin{aligned} k_0(c_i y_i + d_i z_i)_0 &= \nu \frac{1 + \mu}{\sin^2 \psi_0}; \\ k_0(c_i j_i + d_i k_i)_0 &= 0; \\ k_0(c_i y_i + d_i z_i)_1 - k(C_2 y_2 + D_2 z_2)_1 &= -(1 - \nu) \frac{1 + \mu}{\sin^2 \psi_1}; \\ k_0(c_i j_i + d_i k_i)_1 - k(C_2 j_2 + D_2 k_2)_1 &= 0; \\ k_0(c_i l_i + d_i m_i)_1 - k\nu^3(C_2 l_2 + D_2 m_2)_1 &= 0; \\ k_0(c_i g_i + d_i h_i)_1 - k\nu(C_2 g_2 + D_2 h_2)_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} j_i &= \mu g_i + \lambda h_i; & k_i &= \mu h_i - \lambda g_i; \\ l_i &= \mu \gamma_i + \lambda \delta_i; & m_i &= \mu \delta_i - \lambda \gamma_i; \\ y_i &= (1 + \mu) g_i + 2p_i; & z_i &= (1 + \mu) h_i + 2q_i. \end{aligned} \quad (5)$$

В левых частях уравнений (4) индексы 0 и 1 у скобок означают, что коэффициенты при неизвестных вычисляются для угла ψ_0 и соответственно ψ_1 .

Заметим, что формулы (5) записаны для основной оболочки. Изменив в них параметр λ на λ_0 , получим соответствующие формулы для подкрепления.

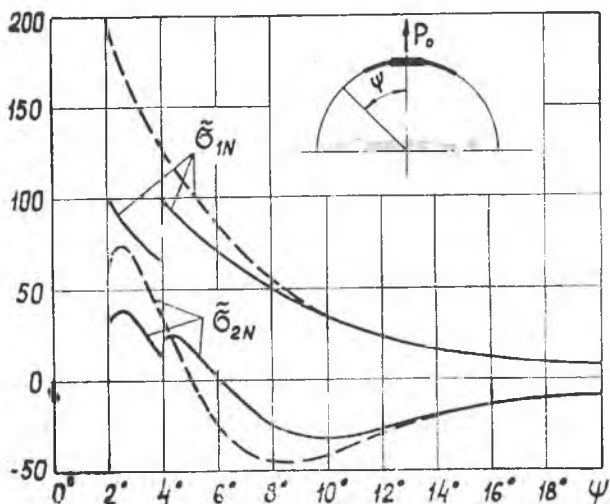


Рис. 2.

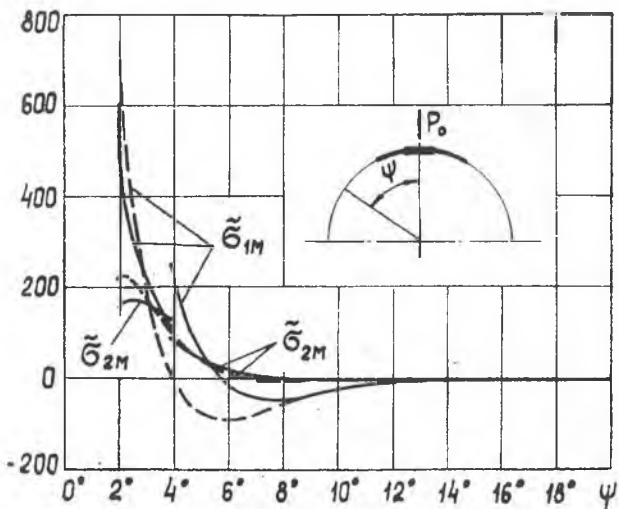


Рис. 3.

4. На рис. 2 и 3 приведены результаты численного расчета сферической оболочки с шайбой и подкреплением при

$$m = \frac{R}{\delta} = 250; \quad m_0 = \frac{R}{\delta_0} = 166,67; \quad \nu = \frac{2}{3};$$

$$\phi_0 = 1^\circ 57' 11''; \quad \phi_1 = 3^\circ 54' 22''.$$

Для сравнения на следующем рис. 4 приведено распределение напряжений в той же оболочке с шайбой, но без подкрепления.

§ 2. Расчет оболочки, нагруженной касательной силой P

1. При нагружении оболочки касательной силой P (см. рис. 1, $P_0=0$, $P \neq 0$, $M=0$) все усилия, моменты и перемещения (как в основной оболочке, так и в подкреплении) могут быть представлены в следующем виде [1]:

$$N_1 = N_{11}(\psi) \cos \varphi; \quad N_2 = N_{21}(\psi) \cos \varphi; \quad S = S_1(\psi) \sin \varphi;$$

$$Q_1 = Q_{11}(\psi) \cos \varphi; \quad Q_2 = Q_{21}(\psi) \sin \varphi;$$

$$M_1 = M_{11}(\psi) \cos \varphi; \quad M_2 = M_{21}(\psi) \cos \varphi; \quad H = H_1(\psi) \sin \varphi; \quad (6)$$

$$u = u_1(\psi) \cos \varphi; \quad v = v_1(\psi) \sin \varphi; \quad w = w_1(\psi) \sin \varphi;$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_{11}(\psi) \cos \varphi; \quad \vartheta_2 = \vartheta_{21}(\psi) \sin \varphi.$$

Отнеся амплитудные значения нормальных и касательных напряжений в основной оболочке вблизи подкрепления к величине $\sigma = \frac{P \cos \psi_0}{\pi R \delta}$, получим на основании формул (1), (2) и (13) из [1] (для краткости записи опускаем второй индекс):

$$\tilde{\sigma}_{1N,1} = \frac{N_{11}}{\delta\sigma^0} = -k(C_2 g_2 + D_2 h_2) - \frac{1}{\sin^3 \psi} \left(\frac{1}{1+\kappa} - \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} \right);$$

$$\tilde{\sigma}_{2N,1} = \frac{N_{21}}{\delta\sigma_0} = k(C_2 \alpha_2 + D_2 \beta_2) + \frac{1}{\sin^3 \psi} \left(\frac{1}{1+\kappa} - \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} \right);$$

$$\tilde{\tau}_{S1} = \frac{S_1}{\delta\sigma^0} = k(C_2 \lambda_2 + D_2 \mu_2) + \frac{1}{\sin^3 \psi} \left(\frac{1}{\cos \psi_0} - \frac{\cos \psi}{1+\kappa} \right);$$

$$\tilde{\sigma}_{1M,1} = \frac{6M_{11}}{\delta^2\sigma^0} = -6km(A_2 \gamma_2 + B_2 \delta_2) - \frac{1}{2m(1+\kappa)\sin^3 \psi};$$

$$\tilde{\sigma}_{2M,1} = \frac{6M_{21}}{\delta^2\sigma^0} = 6km(A_2 \zeta_2 + B_2 \eta_2) + \frac{1}{2m(1+\kappa)\sin^3 \psi};$$

$$\tilde{\tau}_{H1} = \frac{6H_1}{\delta^2\sigma^0} = 6km(1-\mu)(A_2 \lambda_2 + B_2 \mu_2) - \frac{\cos \psi}{2m(1+\kappa)\sin^3 \psi}.$$

Для подкрепления аналогично можно получить

$$\tilde{\sigma}_{1N,1} = \frac{N_{11}}{\delta_0\sigma^0} = -k_0(c_i g_i + d_i h_i) - \frac{\nu}{\sin^3 \psi} \left(\frac{1}{1+\kappa_0} - \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} \right);$$

$$\tilde{\sigma}_{2N,1} = \frac{N_{21}}{\delta_0\sigma^0} = k_0(c_i \alpha_i + d_i \beta_i) + \frac{\nu}{\sin^3 \psi} \left(\frac{1}{1+\kappa_0} - \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} \right);$$

$$\tilde{\tau}_{S1} = \frac{S_1}{\delta_0\sigma^0} = k_0(c_i \lambda_i + d_i \mu_i) + \frac{\nu}{\sin^3 \psi} \left(\frac{1}{\cos \psi_0} - \frac{\cos \psi}{1+\kappa_0} \right);$$

$$\tilde{\sigma}_{1M,1} = \frac{6M_{11}}{\delta_0^2\sigma^0} = -6k_0m_0(a_i \gamma_i + b_i \delta_i) - \frac{1}{2m(1+\kappa_0)\sin^3 \psi};$$

$$\tilde{\sigma}_{2M,1} = \frac{6M_{21}}{\delta_0^2\sigma^0} = 6k_0m_0(a_i \zeta_i + b_i \eta_i) + \frac{1}{2m(1+\kappa_0)\sin^3 \psi};$$

$$\tilde{\tau}_{H1} = \frac{6H_1}{\delta_0^2\sigma_0} = 6k_0m_0(1-\mu)(a_i \lambda_i + b_i \mu_i) - \frac{\cos \psi}{2m(1+\kappa_0)\sin^3 \psi}.$$

В формулах (7) и (8) $k = \gamma \frac{E}{\sigma^0}$, $k_0 = \gamma_0 \frac{E}{\sigma^0}$; $\kappa_0 = \frac{1}{12m_0^2}$.

Значения функций $g_1, h_1, \dots, \lambda_2$ и μ_2 для подкрепления находят ся по формулам (3) из [1] при $n=1$ и $\lambda=\lambda_0$, причем ввиду его пологости в качестве приближенных выражений для $\sigma_{11}, \tau_{11}, \sigma_{21}$ и τ_{21} принимаются функции Томсона первого порядка [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= ber_1 x, & \tau_{11} &= -bei_1 x, \\ \sigma_{21} &= ker_1 x, & \tau_{21} &= -kei_1 x. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$x = \sqrt{\lambda_0 \psi}.$$

Возвращаясь от параметра λ_0 к параметру λ , получаем все необходимые зависимости и для основной оболочки.

2. Для определения произвольных постоянных имеем следующие условия:

- 1) $u_r(\psi_0, \varphi) = \Delta \cos \varphi$; 2) $v(\psi_0, \varphi) = -\Delta \sin \varphi$;
- 3) $u_z(\psi_0, \varphi) = -RZ \sin \psi_0 \cos \varphi$; 4) $\vartheta_1(\psi_0, \varphi) = Z \cos \varphi$;
- 5) $u_r(\psi_1 - 0, \varphi) = u_r(\psi_1 + 0, \varphi)$; 6) $v_1(\psi_1 - 0, \varphi) = v_1(\psi_1 + 0, \varphi)$;
- 7) $u_z(\psi_1 - 0, \varphi) = u_z(\psi_1 + 0, \varphi)$; 8) $\vartheta_1(\psi_1 - 0, \varphi) = \vartheta_1(\psi_1 + 0, \varphi)$;
- 9) $M_1(\psi_1 - 0, \varphi) = M_1(\psi_1 + 0, \varphi)$; 10) $N_1(\psi_1 - 0, \varphi) = N_1(\psi_1 + 0, \varphi)$. (10)

Здесь Δ и Z — горизонтальное смещение и угол поворота шайбы под действием силы P , u_z — вертикальное перемещение точки срединной поверхности оболочки, равное

$$u_z = -u \sin \psi + w \cos \psi.$$

В условия (10) помимо постоянных C_2, D_2, c_1, d_1, c_2 и d_2 , определяющих напряжения в основной оболочке и подкреплении, войдут еще четыре других постоянных, а именно C_1^*, D_1^*, c_1^* и d_1^* , которые характеризуют перемещения оболочки как твердого тела [1].

Путем простых преобразований выражений (10) с учетом (6) можно получить следующие 6 уравнений, содержащих только C_2, D_2, c_1, d_1, c_2 и d_2 :

- 1) $u_{r1}(\psi_0) + v_1(\psi_0) = 0$; 2) $u_{z1}(\psi_0) + R\vartheta_{11}(\psi_0) \sin \psi_0 = 0$;
- 3) $u_{r1}(\psi_1 - 0) + v_1(\psi_1 - 0) = u_{r1}(\psi_1 + 0) + v_1(\psi_1 + 0)$; (11)
- 4) $u_{z1}(\psi_1 - 0) + R\vartheta_{11}(\psi_1 - 0) \sin \psi_1 = u_{z1}(\psi_1 + 0) + R\vartheta_{11}(\psi_1 + 0) \sin \psi_1$;
- 5) $M_{11}(\psi_1 - 0) = M_{11}(\psi_1 + 0)$; 6) $N_{11}(\psi_1 - 0) = N_{11}(\psi_1 + 0)$

или в развернутом виде

$$k_0(c_i y_i + d_i z_i)_0 = \nu \frac{1 + \mu}{\sin^3 \psi_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \nu_0} \right); \quad (12)$$

$$k_0(c_i e_i + d_i f_i)_0 = -\nu \frac{1 + \mu}{\cos \psi_0 \sin^3 \psi_0}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & k_0(c_i y_i + d_i z_i)_1 - k(C_2 y_2 + D_2 z_2)_1 = \\ & = \frac{1 + \mu}{\sin^3 \psi_1} \left[\frac{1}{1 + \nu} - \frac{\nu}{1 + \nu_0} - (1 - \nu) \frac{\cos \psi_1}{\cos \psi_0} \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$k_0(c_i e_i + d_i f_i)_1 - k(C_2 e_2 + D_2 f_2)_1 = \frac{(1 - \nu)(1 + \mu)}{2 \cos \psi_0 \sin^2 \psi_1}; \quad (15)$$

$$k_0(c_i l_i + d_i m_i)_1 - k\nu^3(C_2 l_2 + D_2 m_2)_1 = -\frac{\nu(1 - \mu^2)}{\sin^3 \psi_1} \left(\frac{1}{1 + \nu_0} - \frac{\nu^2}{1 + \nu} \right); \quad (16)$$

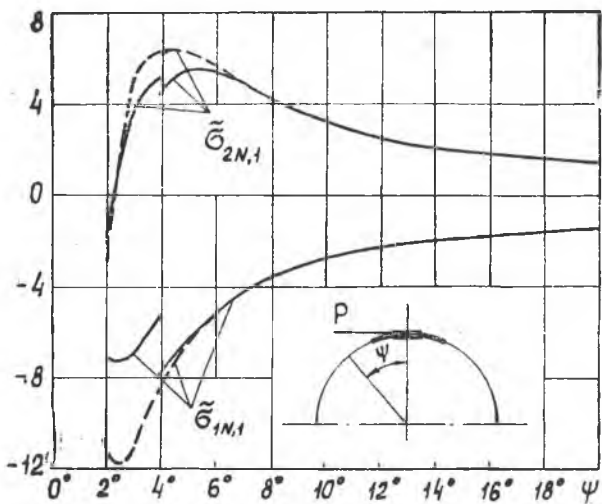


Рис. 4.

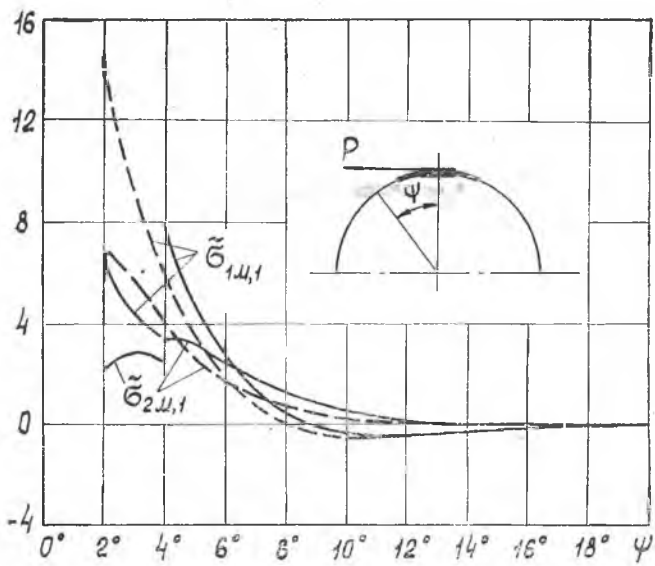


Рис. 5.

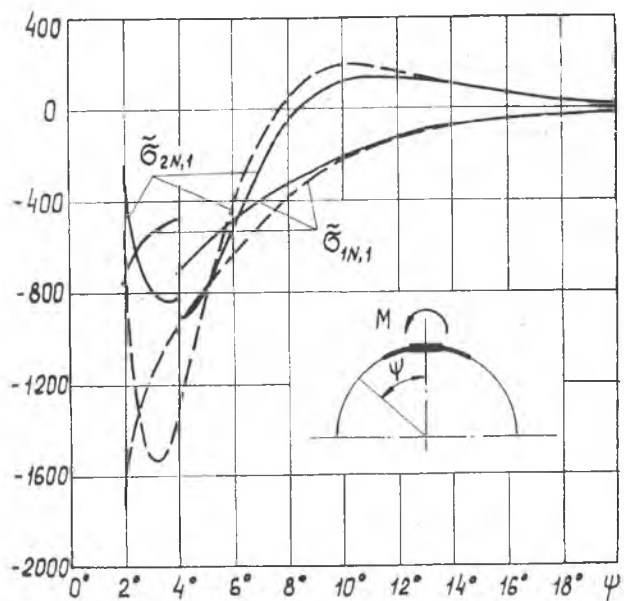


Рис. 6.

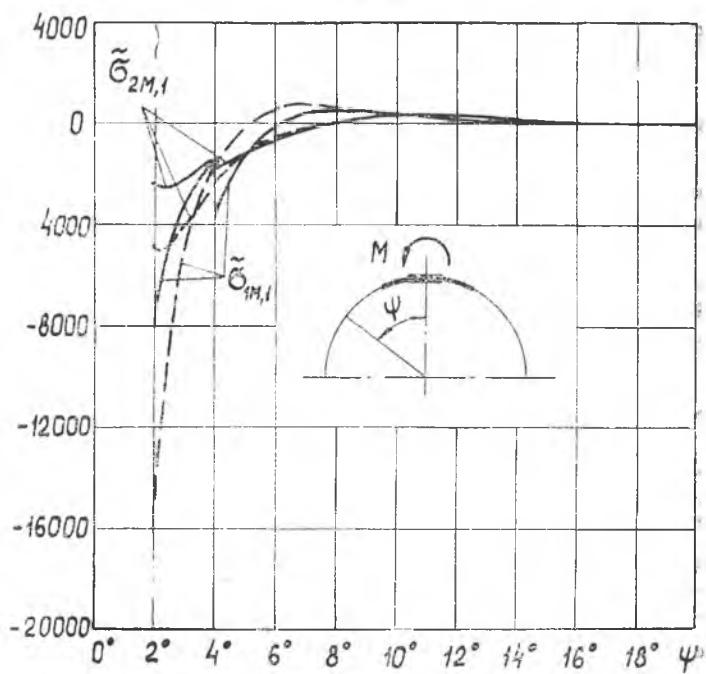


Рис. 7.

$$k_0(c_i g_i + d_i h_i)_1 - k\nu(C_2 g_2 + D_2 h_2)_1 = \frac{\nu}{\sin^3 \psi_1} \left(\frac{1}{1 + \alpha} + \frac{1}{1 + \alpha_0} \right). \quad (11)$$

Здесь $e_i = p_i \operatorname{ctg} \phi - p'_i$; $f_i = q_i \operatorname{ctg} \phi - q'_i$.

3. На рисунках 4 и 5 показано распределение напряжений для рассмотренных ранее оболочек с подкреплением и без него при нагружении касательной силой P .

§ 3. Расчет оболочки, нагруженной моментом M

1. Если оболочка, показанная на рис. 1, нагружена только моментом M , приложенным к жесткой шайбе, то ее напряженное деформированное состояние может быть описано теми же выражениями (6), что и в предыдущем случае нагружения, причем формулы для вычисления напряжений, отнесенных к величине

$$c^0 = \frac{M}{\pi R^2 \delta},$$

получатся из (7) и (8), если в скобках правых частей опустить слагаемые, содержащие $\cos \phi_0$.

Произвольные постоянные определяются из условий (11). В развернутой форме эти условия образуют систему 6-ти уравнений относительно C_2 , D_2 , c_1 , d_1 , c_2 и d_2 , из которых первое и третье будут иметь вид

$$k_0(c_i y_i + d_i z_i)_0 = - \frac{\nu}{1 + \alpha_0} \frac{1 + \mu}{\sin^3 \phi_0};$$

$$k_0(c_i y_i + d_i z_i)_1 - k(C_2 y_2 + D_2 z_2)_1 = \frac{1 + \mu}{\sin^3 \psi_1} \left(\frac{1}{1 + \alpha} - \frac{\nu}{1 + \alpha_0} \right).$$

Второе и четвертое уравнения получатся из (13) и (15), если их правые части приравнять нулю. Остальные два совпадут с (16) и (17).

2. Расчеты, проведенные для рассмотренных ранее оболочек на случай нагружения моментом, привели к результатам, представленным на рис. 6 и 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедьянов И. С. Расчет сферической оболочки, нагруженной через эксцентрично расположенную жесткую шайбу. Настоящий сб., стр. 28.
2. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. Госстройиздат, 1961.
3. Ахмедьянов И. С. Температурные напряжения в сферической оболочке при осесимметричном нагреве. Сб. «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций». Труды КуАИ, в. 39, Куйбышев, 1968.
4. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд-во иностранной литературы, 1948.