КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

А. Д. Бойков, Н. Д. Егупов

РАСЧЕТ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СОПРЯЖЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что на вход анализируемой системы поступает процесс $y(t)$, являющийся суммой полезного сигнала и помехи:

$$y(t) = m(t) + n(t). \tag{1}$$

Воздействия $m(t)$ и $n(t)$ являются нестационарными случайными функциями времени с известными корреляционными функциями и математическими ожиданиями.

Работа системы рассматривается в моменты времени, превышающие время эффективной длительности импульсной переходной функции. Найдем выражение для математического ожидания корреляционной функции и дисперсии сигнала ошибки.

Общая формула для сигнала ошибки имеет вид:

$$\varepsilon(t) = m(t) - \int_0^\infty k(t, t-\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda. \tag{2}$$

Из последней формулы имеем:

$$M[\varepsilon(t)] = m_\varepsilon(t) = m_m(t) - \int_0^\infty k(t, t-\lambda)\, m_y(t-\lambda)\, d\lambda. \tag{3}$$

Корреляционная функция определяется зависимостью:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2) = M\{[\varepsilon(t_1) - m_\varepsilon(t_1)][\varepsilon(t_2) - m_\varepsilon(t_2)]\}. \tag{4}$$

Имеем:

$$\varepsilon(t_1) = m(t_1) - \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, y(t_1-\lambda_1)\, d\lambda_1,$$

$$\varepsilon(t_2) = m(t_2) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\, y(t_2-\lambda_2)\, d\lambda_2,$$

$$m_\varepsilon(t_1) = m_m(t_1) - \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, m_y(t_1-\lambda_1)\, d\lambda_1,$$

$$m_\varepsilon(t_2) = m_m(t_2) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\, m_y(t_2-\lambda_2)\, d\lambda_2.$$

Используя последние выражения, получим:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2) = M\{[m(t_1) - m_m(t_1) - \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)[y(t_1-\lambda_1) -$$

$$- m_y(t_1-\lambda_1)]\, d\lambda_1]\,[m(t_2) - m_m(t_2) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)[y(t_2-\lambda_2) -$$

$$- m_y(t_2-\lambda_2)]\, d\lambda_2]\} = M\{[\dot m(t_1) - \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\dot y(t_1-\lambda_1)\, d\lambda_1] \times$$

$$\times [\dot m(t_2) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\dot y(t_2-\lambda_2)\, d\lambda_2] = M\{\dot m(t_1)\dot m(t_2) -$$

$$- \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\dot m(t_1)\dot y(t_2-\lambda_2)\, d\lambda_2 - \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\dot y(t_1-\lambda_1)\dot m(t_2)\, d\lambda_1 +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, k(t_2, t_2-\lambda_2)\, \dot y(t_1-\lambda_1)\dot y(t_2-\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2\} =$$

$$= R_{mm}(t_1, t_2) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\, R_{my}(t_1, t_2-\lambda_2)\, k\lambda_2 -$$

$$- \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, R_{ym}(t_1-\lambda_1, t_2)\, d\lambda_1 +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty k(t_1\ t_1-\lambda_1)(t_2, t_2-\lambda_2)\, R_{yy}(t_1-\lambda_1, t_2-\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2.$$

Итак, корреляционная функция сигнала ошибки может быть выражена формулой:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2) = R_{mm}(t_1, t_2) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\, R_{my}(t_1, t_2-\lambda_2)\, d\lambda_2 -$$

$$- \int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, R_{ym}(t_1-\lambda_1\ t_2)\, d\lambda_1 +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, k(t_2, t_2-\lambda_2)\, R_{yy}(t_1-\lambda_1, t_2-\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2. \tag{5}$$

В случае, если $m(t)$ и $n(t)$ — стационарные случайные функции, последняя формула принимает вид:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2) = R_{mm}(t_2-t_1) - \int_0^\infty k(t_2, t_2-\lambda_2)\, R_{my}(t_2-t_1-\lambda_2)\, d\lambda_2 -$$

$$-\int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, R_{ym}(t_2-t_1+\lambda_1)\, d\lambda_1 +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty k(t_1, t_1-\lambda_1)\, k(t_2, t_2-\lambda_2)\, R_{yy}(t_2-t_1-\lambda_2+\lambda_1)\, d\lambda_2\, d\lambda_1. \qquad (6)$$

Формулы для дисперсии сигнала ошибки для нестационарного и стационарного сигналов имеют вид:

$$D(t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t) = R_{mm}(t_1, t) - 2\int_0^\infty k(t, t-\lambda)\, R_{my}(t, t-\lambda)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty k(t, t-\lambda_1)\, k(t, t-\lambda_2)\, R_{yy}(t-\lambda_1, t-\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2; \qquad (7)$$

$$D(t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(t, t) = R_{mm}(0) - 2\int_0^\infty k(t, t-\lambda)\, R_{my}(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty k(t, t-\lambda_1)\, k(t, t-\lambda_2)\, R_{yy}(\lambda_1-\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2. \qquad (8)$$

Представим импульсную переходную функцию нестационарной линейной системы в виде [2]

$$k(t, t-\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i(t)\, \varphi_i(\lambda).$$

С учетом последней формулы зависимости $(5)\div(8)$ принимают вид:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2) = R_{mm}(t_1, t_2) - \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t_2)\, R'_{imy}(t_1, t_2) -$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} c_i(t_1)\, R'_{iym}(t_1, t_2) + \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} c_{i_1}(t_1)\, c_{i_2}(t_2)\, R_{i_1 i_2}(t_1, t_2); \qquad (9)$$

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(t_1, t_2) = R_{mm}(t_2-t_1) - \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t_2)\, R'_{imy}(t_2-t_1) -$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty} c_i(t_1)\, R'_{iym}(t_2-t_1) + \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} c_{i_1}(t_1)\, c_{i_2}(t_2)\, R_{i_1 i_2}(t_2-t_1), \qquad (10)$$

$$D(t) = R_{mm}(t, t) - 2\sum_{i=0}^{\infty} c_i(t)\, R'_{imy}(t, t) +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} c_{i_1}(t)\, c_{i_2}(t)\, R_{i_1 i_2}(t, t); \qquad (11)$$

$$D(t) = R_{mm}(0) - 2\sum_{i=0}^{\infty} c_i(t)\, R'_{imy}(0) +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} c_{i_1}(t)\, c_{i_2}(t)\, R_{i_1 i_2}(0), \qquad (12)$$

где

$$R'_{my}(t_1, t_2) = \int_0^\infty \varphi_i(\lambda_2) R_{my}(t_1, t_2 - \lambda_2) d\lambda_2.$$

Таким образом, выражения (5)÷(12) и (3) могут служить рабочими формулами, с помощью которых можно рассчитать математические ожидания, корреляционные функции и дисперсии сигналов ошибки при воздействии на входе стационарных и нестационарных случайных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов, Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8, Машиностроение, 1968.
2. А. Д. Бойков, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Анализ нестационарной системы в случае, если известна ее параметрическая передаточная функция. Труды КуАИ, вып. 43, Куйбышев, 1971.
3. А. В. Солодов. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз, 1962.