

Г.Е.Белашевский

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКЕ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Исследуется напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, имеющей на боковой поверхности абсолютно жесткое включение средних размеров некруговой формы. Рассмотрены растяжение, кручение и действие на оболочку внутреннего давления. Приведены результаты числовых расчетов.

I. Постановка задачи и метод решения

Для описания возмущений, вносимых включением в основное напряженное состояние (напряженное состояние оболочки без включения), используется уравнение пологой цилиндрической оболочки [1]

$$\Delta \Delta F + \delta i \omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (I)$$

где

$$F = W + i\Phi, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}}$$

$\Delta$  - оператор Лапласа,  $R_0$  - постоянная, характеризующая абсолютные размеры включения,  $\alpha, \beta$  - безразмерные (отнесенные к  $R_0$ ) координаты точек срединной поверхности (рис.1),  $R$  - радиус срединной поверхности,  $h$  - толщина оболочки,  $\mu$  - коэффициент Пуассона,  $W$  - перемещение по нормали к срединной поверхности,  $\Phi$  - функция напряжений, через которую находятся тангенциальные перемещения оболочки  $U_z, U_\varphi$ . По линии спая оболочки с включением должны выполняться условия:

$$W + \bar{W}|_r = \bar{W}^*|_r, \quad p \equiv \frac{\partial W}{\partial n}|_r = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_z^* &= U_z + \bar{U}_z|_r, \quad U_\varphi + \bar{U}_\varphi|_r = \bar{U}_\varphi^*|_r \\ & (\mathbf{n} - \text{нормаль к контуру } \Gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь чертой сверху обозначены перемещения оболочки в основном состоянии, а звездочкой - перемещения включения. Решение краевой задачи (1), (2) строится методом возмущения формы границы [2], применение которого предполагает известным решение задачи (1), (2) для случая, когда  $\Gamma$  - окружность. Такое решение получено в работах [3, 4, 5]. Здесь используются результаты работ [3, 6], согласно которым в полярной системе координат  $\rho, \theta$

$$\begin{bmatrix} W \\ U_\rho \\ U_\theta \end{bmatrix} = \sum_{n, \nu} \left\{ c_n \begin{bmatrix} \psi_1(\rho, \nu, n) \\ \psi_3(\rho, \nu, n) \\ \psi_5(\rho, \nu, n) \end{bmatrix} + d_n \begin{bmatrix} \psi_2(\rho, \nu, n) \\ \psi_4(\rho, \nu, n) \\ \psi_6(\rho, \nu, n) \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} \cos \nu \theta \\ \sin \nu \theta \end{matrix} \quad (3)$$

где  $\psi_i(\rho, \nu, n)$  - известные функции, выражения для которых приведены в [6],  $c_n, d_n$  - постоянные интегрирования.

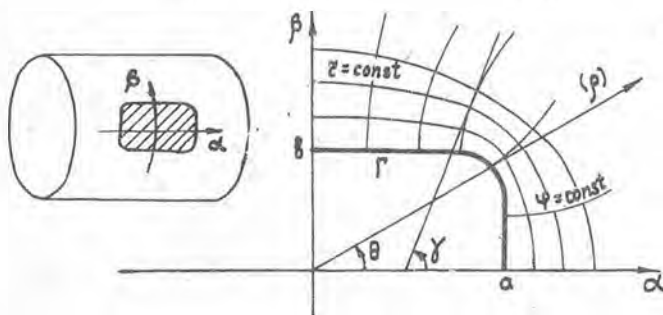


Рис. I

Пусть функция

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= R_0 [\tau + \varepsilon f(\tau)], \\ \tau &= z e^{i\psi}, \quad z = R_0(\alpha + i\beta) = R_0 \rho e^{i\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

отображает внешность круга единичного радиуса на внешность контура  $\Gamma$ . Выполнив необходимые преобразования метода возмущения и ограничиваясь в разложениях по малому параметру первыми двумя

членами, получим

$$\begin{aligned} W^j + \bar{W}^j|_r &= \bar{W}^{*j}|_r, \quad P^j|_r = 0, \\ U_z^j + \bar{U}_z^j|_r &= \bar{U}_z^{*j}|_r, \quad U_\varphi^j + \bar{U}_\varphi^j|_r = \bar{U}_\varphi^{*j}|_r \end{aligned} \quad (5)$$

(  $j = 0, I$  - номер приближения)

Здесь

$$\begin{aligned} W^j &= \tilde{W}^j + \omega^j, \quad \rho^j = \frac{\partial \tilde{W}^j}{\partial z} + \rho^j, \\ U_z^j &= \tilde{U}_z^j + U_z^j, \quad U_\varphi^j = \tilde{U}_\varphi^j + U_\varphi^j \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения для функций  $\tilde{W}^j(z, \varphi)$ ,  $\tilde{U}_z^j(z, \varphi)$ ,  $\tilde{U}_\varphi^j(z, \varphi)$  получают-ся из формул (3), если постоянные  $c_n$ ,  $d_n$  записать с индексом  $j$  и произвести формальную замену  $\rho$ ,  $\theta$  на  $z$ ,  $\varphi$ . Поправочные члены нулевого приближения  $\omega^0 = \rho^0 = U_z^0 = U_\varphi^0 = 0$ . Для первого приближения

$$\begin{aligned} \omega^1 &= L_1 \tilde{W}^0, \quad \rho^1 = \frac{1}{R_0} \left( L_1 \frac{\partial \tilde{W}^0}{\partial z} + L_2 \frac{1}{z} \frac{\partial \tilde{W}^0}{\partial \varphi} \right), \\ U_z^1 &= L_1 \tilde{U}_z^0 + L_2 \tilde{U}_\varphi^0, \quad U_\varphi^1 = L_1 \tilde{U}_\varphi^0 - L_2 \tilde{U}_z^0 \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения (7), где  $L_1$ ,  $L_2$  - операторы метода возмущения, в развернутом виде представляют бесконечные тригонометрические ряды с постоянными интегрирования нулевого приближения  $c_n^0$ ,  $d_n^0$ . Перемещения основного состояния  $\bar{U}_z$ ,  $\bar{U}_\varphi$  связаны с известными перемещениями  $\bar{U}_\alpha$ ,  $\bar{U}_\beta$  соотношением

$$\bar{U}_z + i \bar{U}_\varphi = e^{i\gamma} (\bar{U}_\alpha + i \bar{U}_\beta) \quad (8)$$

Здесь  $\gamma$  - угол между осью  $\alpha$  и касательной к линии  $\varphi = \text{const}$  в заданной точке (рис. 1). Перемещения  $\bar{W}$ ,  $\bar{U}_z$ ,  $\bar{U}_\varphi$  можно получить, интегрируя однородные геометрические соотношения пологой цилиндрической оболочки. Для случая растяжения и действия внутреннего давления

$$\begin{aligned} \bar{W} &= R_0 a, \quad \bar{U}_z = -R_0 a \alpha \beta \sin \gamma, \\ \bar{U}_\varphi &= -R_0 a \alpha \beta \cos \gamma, \quad \alpha = R_0 / R, \end{aligned} \quad (9)$$

а для кручения

$$\begin{aligned} \dot{W}^* &= 0, \quad \dot{U}_z^* = R_0 b (\alpha \sin \gamma - \beta \cos \gamma), \\ \dot{U}_\varphi^* &= -R_0 b (\alpha \cos \gamma + \beta \sin \gamma). \end{aligned} \quad (10)$$

Постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  характеризуют смещение включения по нормали к срединной поверхности и поворот относительно той же нормали. Выражения для  $\dot{U}_z^*$ ,  $\dot{U}_\varphi^*$ ,  $\dot{W}^*$ ,  $\dot{U}_z^*$ ,  $\dot{U}_\varphi^*$  можно найти разложением правых частей равенств (8) - (10) в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ , используя формулы

$$\begin{aligned} \alpha &= z \cos \varphi + \varepsilon R_0 f(z), \quad \beta = z \sin \varphi + \varepsilon J m f(z), \\ e^{i\gamma} &= e^{i\varphi} [1 + \varepsilon R_0 f'(z)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Удержим теперь в бесконечных рядах конечное число слагаемых  $n_{\max} = \nu_{\max} = t$  и приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в граничных условиях (5). В результате получим совместные системы линейных алгебраических уравнений с постоянными интегрирования в качестве неизвестных. Сходимость рядов, как показали расчеты, зависит от вида нагрузки, формы включения и его размеров. В наиболее неблагоприятном случае (кручение оболочки с прямоугольным включением)  $n_{\max} = \nu_{\max} = 10$ .

## 2. Числовые результаты

После определения постоянных интегрирования по формулам для изгибающих моментов  $M_z$ ,  $M_\varphi$  и усилий  $N_z$ ,  $N_\varphi$ ,  $T_z \varphi$  работы [7] можно вычислить напряжения

$$\sigma_{z(\varphi)}^M = \frac{6 M_z(\varphi)}{h^2 \sigma_0}, \quad \sigma_{z(\varphi)}^N = \frac{N_z(\varphi)}{h \sigma_0}, \quad \sigma_{z(\varphi)}^\pm = \sigma_{z(\varphi)}^N \pm \sigma_{z(\varphi)}^M, \quad \tau_{z\varphi} = \frac{T_z \varphi}{h \sigma_0} \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_0$  - напряжение, которое принималось равным  $N/h$  при растяжении оболочки силами  $N$ ,  $T/h$  - при кручении силами  $T$ ,  $\frac{\rho R}{h}$  - для действия внутреннего давления интенсивности  $\rho$ . Для оценки напряженного состояния оболочки с включением вычислялись также эквивалентные напряжения

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_z \sigma_\varphi + 3 \tau_{z\varphi}^2} \quad (13)$$

Форма включения принималась эллиптической, квадратной и прямоугольной (с закругленными углами). В таблицах приведены максимальные на линии спая  $\Gamma$  значения напряжений. Через  $a$ ,  $b$  обозначены размеры включения,  $r_0$  - радиус закругления. Под ромбическим понимается повернутое на угол  $\pi/4$  квадратное включение.

Из физических соотношений в силу того, что по линии спая  $\Gamma$  тангенциальная  $\varepsilon_\varphi$  и изгибные  $\varkappa_\varphi$ ,  $\varkappa_{2\varphi}$  деформации равны нулю, следует

$$N_\varphi = \mu N_z, \quad M_\varphi = \mu M_z \quad (I4)$$

Выполнение равенств (I4) подтвердилось расчетами, и на этом основании значения  $\sigma_\varphi^M$ ,  $\sigma_\varphi^N$  не приводятся.

В случае растяжения оболочки (таблица I) и действия внутреннего давления (таблица 2) наибольшие эквивалентные напряжения имеют место по линии спая оболочки с включением на внутренней поверхности. С ростом размеров включения изгибные напряжения растут, мембранные - падают, эквивалентные - почти не меняются. Эллиптичность включения мало влияет на величину напряжений, в

Таблица I

растяжение оболочки		Эллипт. вкл. $R_0 = 0,5(a+b)$		кв. вкл.	ромбич. вкл.	прямоуг. вкл. $R_0 = 10r_0 = 0,5(a+b)$		круг. вкл. [3]
		$a/b = 1,3$	$b/a = 1,3$	$R_0 = 10r_0 = 1,2a$	$a/b = 1,3$	$b/a = 1,3$		
$\omega = 0,5$	$\max \sigma_z^M$	0,33	0,33	0,29	0,51	0,40	0,44	0,33
	$\max \sigma_z^N$	1,32	1,46	1,60	1,95	2,16	1,64	1,46
	$\max \varkappa_{z\varphi}^T$	0,69	0,72	1,15	0,93	1,58	1,41	0,72
	$\max \sigma_{\text{экв.}}$	1,61	1,36	2,15	1,96	2,90	2,58	1,45
$\omega = 1,5$	$\max \sigma_z^M$	0,60	0,65	0,61	1,02	0,72	0,75	0,62
	$\max \sigma_z^N$	1,42	1,20	1,47	1,76	1,99	1,53	1,31
	$\max \varkappa_{z\varphi}^T$	0,77	0,67	1,12	0,91	1,55	1,36	0,70
	$\max \sigma_{\text{экв.}}$	1,59	1,32	2,13	2,06	2,88	2,56	1,41

то время как квадратная и прямоугольная формы приводят к значительному увеличению  $\max \sigma_{\text{экв.}}$ .

При кручении оболочки наибольшие напряжения действуют на внешней поверхности оболочки. Отклонение формы включения от круговой приводит к увеличению  $\max \sigma_{\text{экв}}^+$ . Самые высокие коэффициенты концентрации напряжений имеют место при кручении оболочки с прямоугольным включением. Поведение величины  $\max \sigma_{\text{экв}}^+$  немонотонно. До  $\omega = 1,5$  значение  $\max \sigma_{\text{экв}}^+$  уменьшается, а, начиная с  $\omega = 2,0$ , возрастает. Так например, при  $\omega = 2,0$  для эллиптического включения с  $b/a = 1,3$   $\max \sigma_{\text{экв}}^+ = 3,51$ , для квадратного включения  $\max \sigma_{\text{экв}}^+ = 7,45$ , для ромбического -  $\max \sigma_{\text{экв}}^+ = 8,76$ .

Таблица 2

Действие внутреннего давления	эллипт. вкл. $R_0 = 0,5 (a + b)$		квдр. вкл. $R_0 = 10r_0 = 1,2a$	ромбич. вкл.	прямоуг. вкл. $R_0 = 10r_0 = 0,6(a+b)$		круг вкл. [3]	
	$a/b = 1,3$	$b/a = 1,3$			$a/b = 1,3$	$b/a = 1,3$		
	$\omega = 0,5$	$\max \sigma_z^M$	0,66	0,70	0,79	1,00	1,18	0,92
	$\max \sigma_z^N$	1,28	1,46	1,52	1,77	1,61	1,93	1,37
	$\max \tau_{z\varphi}^T$	0,27	0,39	0,57	0,60	0,73	0,88	0,32
	$\max \sigma_{\text{экв}}^M$	1,36	1,47	1,94	1,70	2,44	2,41	1,39
$\omega = 1,5$	$\max \sigma_z^M$	1,06	1,17	1,22	1,15	1,62	1,54	1,12
	$\max \sigma_z^N$	1,14	1,24	1,33	1,47	1,41	1,65	1,20
	$\max \tau_{z\varphi}^T$	0,25	0,31	0,44	0,50	0,54	0,70	0,27
	$\max \sigma_{\text{экв}}^M$	1,59	1,61	1,92	1,64	2,45	2,27	1,60

Таблица 3

кручение оболочки	эллипт. вкл. $R_0 = 0,5 (a + b)$		квдр. вкл. $R_0 = 10r_0 = 1,2a$	ромбич. вкл.	прямоуг. вкл. $R_0 = 10r_0 = 0,6(a+b)$		круг вкл. [3]	
	$a/b = 1,3$	$b/a = 1,3$			$a/b = 1,3$	$b/a = 1,3$		
	$\omega = 0,5$	$\max \sigma_z^M$	1,11	0,47	1,15	1,01	1,32	1,30
	$\max \sigma_z^N$	1,98	0,85	4,61	5,55	10,55	8,93	1,36
	$\max \tau_{z\varphi}^T$	1,31	1,82	2,13	3,58	3,20	4,88	1,38
	$\max \sigma_{\text{экв}}^+$	2,70	3,15	6,18	6,20	10,24	11,17	2,40
$\omega = 1,5$	$\max \sigma_z^M$	1,72	1,07	2,52	2,84	2,59	3,42	1,40
	$\max \sigma_z^N$	1,47	0,93	2,75	3,76	6,78	5,18	1,15
	$\max \tau_{z\varphi}^T$	1,33	1,59	1,83	2,88	2,11	3,76	1,31
	$\max \sigma_{\text{экв}}^+$	2,77	2,76	5,42	5,31	7,81	9,22	2,37

Распространение возмущения исследовалось на примере оболочки с квадратным включением. Размер зоны возмущений зависел в основном от изгибных напряжений. Практически на расстоянии  $1,5 R_0$  от линии сая напряженное состояние было невозмущенным.

### Л и т е р а т у р а

1. Дурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, 1947.
2. Гузь О.М. Про приближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках. "Прикладная механика", т.УШ, в.6, 1962.
3. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрической оболочки с жесткой круглой шайбой на боковой поверхности. ИВУЗ, "Авиационная техника", № 1, 1970.
4. Хотин Я.Я. Изгиб панели с жестким включением. Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1968-1969г.г. Московский энергетический институт, 1969.
5. Dyke P. *Stresses in a cylindrical shell with a rigid a cylindrical shell with a rigid inclusion*, *AJAA journal* vol 5 No 1 1967 г.
6. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрических оболочек с круговыми отверстиями. Сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
7. Белашевский Г.Е. Растяжение цилиндрической оболочки с некруговым отверстием. Сб. "Остаточные напряжения", Труды КуАИ, вып. 53, 1971.