КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

Д. Н. Незванов

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВАФЕЛЬНОГО ТИПА ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Принятые обозначения

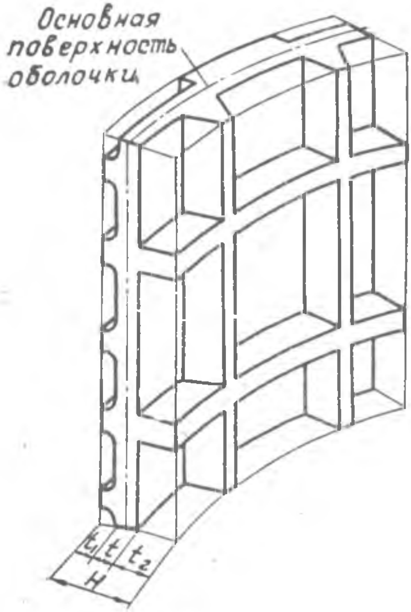
x, y, z — координаты точек основной поверхности оболочки (фиг. 2);
u, v, w — перемещения точек основной поверхности в направлениях осей x, y, z;
R, l — радиус основной поверхности и длина оболочки;
H, t — общая высота ребер и толщина гладкого слоя (фиг. 1);
m — число полуволн изогнутой поверхности оболочки вдоль длины цилиндра;
n — число полных волн по окружности цилиндра;
E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки (при вычислениях принято $\mu = 0{,}3$);
B_{ij}, K_{ij}, D_{ij}, A_{ij}, K'_{ij}, D'_{ij} — коэффициенты жесткости;
$\Phi(x, y)$ — функция усилий;

$$L(A, B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$ — оператор,

s — верхний или нижний индекс для величин, относящихся к отдельным слоям.

В последние годы в авиационной технике все шире применяются «вафельные» цилиндрические оболочки. Их получают путем прокатки, штамповки, механического или химического фрезерования плит (фиг. 1). Вопросу устойчивости подобных оболочек посвящен ряд работ, однако они содержат недостаточно данных для практических расчетов. Большинство исследований задачи проводится в линейной постановке, что не дает количественной оценки эффекта подкрепления оболочки ребрами. В других работах, где исследование проводится в нелинейной постановке, не учитывается влияние одностороннего расположения ребер, а решения не доводятся до численных результатов. Более тщательное исследование, лишенное указанных недостатков, принадлежит О. И. Теребушко [4]. Однако им получены несколько завышенные значения критических нагрузок, что объясняется видом выбранной функции прогиба и рядом неточностей в физических соотношениях задачи.

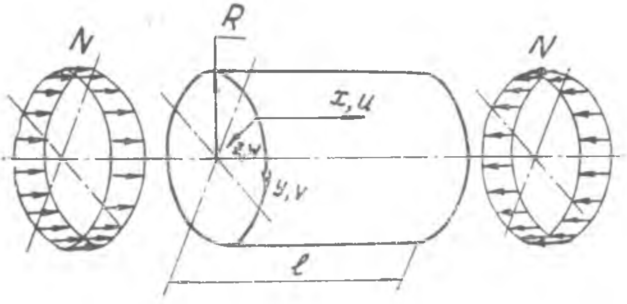
Настоящая работа имеет целью получить рекомендации для инженерных расчетов на устойчивость цилиндрических оболочек вафельного типа, нагруженных осевым сжатием. Задача решается в геометрически нелинейной постановке методом Ритца. За критерий устойчивости принимается нижняя критическая нагрузка, соответствующая принятой форме волнообразования. Для исследования выбирается такая функция прогиба, которая в частном случае изотропной оболочки приводит к величине критических напряжений $\sigma_{кр}=0{,}175Et/R$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными для оболочек средней длины с относительной толщиной $200<R/t<500$ [2, 7].



Фиг. 1.

При изучении устойчивости подкрепленных оболочек существует два подхода к решению задачи: либо учитывается дискретный характер элементов жесткости, либо эти элементы «размазываются» по оболочке. Имея в виду присущее вафельным оболочкам частое расположение ребер, здесь используется последний прием.

Для большей строгости в физических соотношениях задачи и в величинах коэффициентов жесткости вафельную оболочку предлагается рассматривать как многослойную, состоящую из одного глад-



Фиг. 2.

кого изотропного слоя и бесконечного множества конструктивно-ортотропных слоев. В свою очередь, многослойная оболочка заменяется эквивалентной ортотропной оболочкой с приведенными жесткостными характеристиками и в дальнейшем проводится исследование устойчивости этой эквивалентной оболочки. Действующие в сечениях оболочки внутренние усилия считаются отнесенными к некоторой произвольно выбранной «основной» поверхности, в качестве которой принимается срединная поверхность гладкого слоя (фиг. 1). Следует отметить, что основная поверхность играет роль базы отсчета при вычислении жесткостных характеристик оболочки, поэтому выбор ее положения не влияет на конечные результаты решения.

В работе учитываются взаимные деформации подкрепляющих ребер, а также приближенно учитывается их сдвиг.

Предлагаемый подход к решению задачи позволяет учесть влияние расположения ребер, отказаться от присущего всем предыдущим исследованиям предположения о малой ширине ребра по сравнению с его шагом и получить решение для оболочек с произвольной формой поперечного сечения ребер. Численное решение проведено для наиболее распространенных видов вафельных оболочек с ребрами прямоугольного сечения произвольной ширины, образующими квадратные клетки. Решение, выполненное на ЭЦВМ М-20, представлено в виде графиков, удобных для практического использования.

Основные соотношения теории многослойных оболочек

Для решения задачи используем известные зависимости и гипотезы теории пологих оболочек [3]. Считаем, что напряжения в оболочке не превышают предела упругости материала.

Для деформаций и кривизн принимаем выражения:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, & \varkappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, & \varkappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\
\gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, & \chi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Используя закон упругости для многослойных оболочек [6], можем записать в матричной форме следующие физические соотношения:

$$
\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{21} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}K'_{11} & K'_{12} & 0\\ K'_{21} & K'_{22} & 0\\ 0 & 0 & K'_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varkappa_x\\ \varkappa_y\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{2}
$$

$$
\begin{pmatrix}M_x\\ M_y\\ 2M_{xy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}K''_{11} & K''_{12} & 0\\ K''_{21} & K''_{22} & 0\\ 0 & 0 & K''_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}D'_{11} & D'_{12} & 0\\ D'_{21} & D'_{22} & 0\\ 0 & 0 & D'_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varkappa_x\\ \varkappa_y\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{3}
$$

Здесь

N_x, N_y, N_{xy} — нормальные и сдвигающие усилия, отнесенные к основной поверхности оболочки;

M_x, M_y, M_{xy} — изгибающие и крутящие моменты, отнесенные к основной поверхности оболочки;

$$A_{11}=\frac{B_{22}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2};\ A_{12}=A_{21}=-\frac{B_{12}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2};\ A_{22}=\frac{B_{11}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2};\ A_{33}=\frac{1}{B_{33}};$$

$$K'_{ij}=\sum_{k=1}^{3}A_{ik}K_{kj};\quad K''_{ij}=K'_{ji};\quad D'_{ij}=D_{ij}-\sum_{n=1}^{3}K_{ik}K'_{kj}; \qquad (4)$$

$$B_{ij}=\sum_s B^s_{ij};$$

$$K_{ij}=\sum_s B^s_{ij}h_s,\ \text{исключая}\ K_{33}:\ K_{33}=\sum_s 2B^s_{33}h_s;$$

$$D_{ij}=\sum_s\left(D^s_{ij}+B^s_{ij}h_s^2\right),\ \text{исключая}\ D_{33}:\ D_{33}=\sum_s\left(D^s_{33}+4B^s_{33}h_s^2\right);$$

B^s_{ij}, D^s_{ij} — жесткости отдельных слоев;

h_s — расстояние отдельного слоя от основной поверхности.

Уравнение неразрывности для многослойных оболочек после введения функции усилий $\Phi(x, y)$

$$N_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad N_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad N_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad (5)$$

и учета (1) и (2) может быть приведено к виду:

$$A_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\left(A_{12}+\frac{A_{33}}{2}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+A_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=$$
$$=-K'_{21}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left(K'_{11}+K'_{22}-K'_{33}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-K'_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$
$$-\frac{1}{2}L(w, w)-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Потенциальная энергия деформации оболочки, вычисленная с использованием выражений (1), (2), (3) и (5), имеет вид

$$U=\frac{1}{2}\iint\limits_{x\ y}\left[A_{11}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2+2A_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+A_{22}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2+A_{33}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+D'_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2D'_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D'_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+D'_{33}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \qquad (7)$$

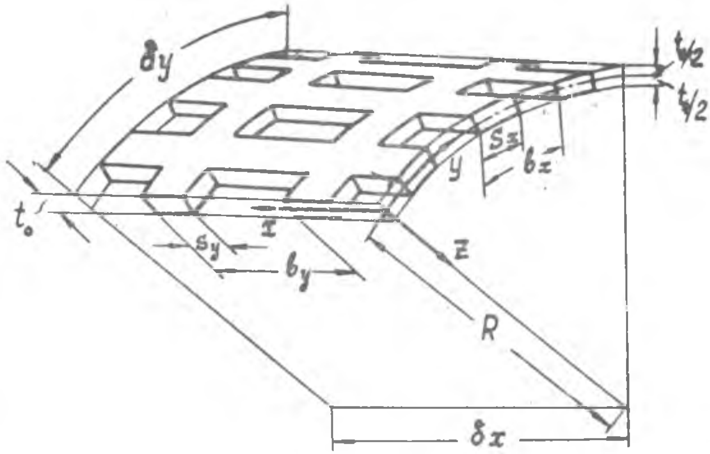
Выражение для работы внешних сил с учетом (1), (2) и (5) запишется в виде

$$W=\int\limits_y\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{x=0,\,l}\int\limits_x\left[A_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+A_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+K'_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+K'_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy. \qquad (8)$$

Жесткостные характеристики отдельного ортотропного слоя

Рассмотрим элемент конструктивно-ортотропного слоя с ребрами прямоугольного сечения (фиг. 3). Его ортотропия характеризуется двумя параметрами k_x и k_y, получившими название коэффициентов заполнения [I]:

$$k_x = \frac{s_x}{b_x}, \quad k_y = \frac{s_y}{b_y}.$$



Фиг. 3.

При нагружении слоя в нем возникает система напряжений, которая может быть заменена равнодействующими погонными усилиями и моментами, отнесенными к срединной поверхности слоя.

Закон упругости для ортотропного слоя имеет вид:

$$\begin{pmatrix} N_x^s \\ N_y^s \\ N_{xy}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{33}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^s \\ \varepsilon_y^s \\ \gamma^s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ 2M_{xy}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa_x^s \\ \varkappa_y^s \\ \chi^s \end{pmatrix}.$$

$$B_{12}^s = B_{21}^s \qquad\qquad D_{12}^s = D_{21}^s \qquad (9)$$

Для определения B_{ij}^s рассмотрим деформации в зоне пересечения ребер. Приложив к элементу, изображенному на фиг. 4, усилия $N_y b_y$, получим

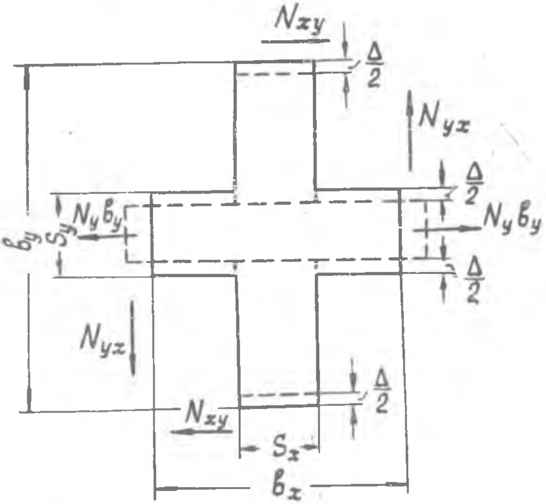
$$\varepsilon_y' = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{N_y b_y}{E t_0 s_y} = \frac{N_y}{E t_0 k_y}.$$

Нагруженное кольцевое ребро, деформируясь в поперечном направлении на величину Δ, увлекает за собой продольное ребро:

$$\Delta = -\mu\varepsilon_y' s_y, \quad \varepsilon_x' = \frac{\Delta}{b_y} = -\frac{\mu\varepsilon_y' s_y}{b_y} = -\mu\frac{N_y}{Et_0}.$$

Приложив усилия $N_x b_x$, соответственно получим

$$\varepsilon_x'' = \frac{N_x}{Et_0 k_x}, \quad \varepsilon_y'' = -\mu\frac{N_x}{Et_0}.$$



Фиг. 4.

Суммируя деформации, имеем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' = -\mu\frac{N_y}{Et_0} + \frac{N_x}{Et_0 k_x}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' = \frac{N_y}{Et_0 k_y} - \mu\frac{N_x}{Et_0}.$$

Отсюда

$$N_x = \frac{Et_0 k_x}{1-\mu^2 k_x k_y}(\varepsilon_x + \mu k_y \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{Et_0 k_y}{1-\mu^2 k_x k_y}(\varepsilon_y + \mu k_x \varepsilon_x). \quad (10)$$

Для приближенного определения жесткости ортотропного слоя на сдвиг нагрузим элемент (фиг. 4) усилиями $N_{xy}b_x$, $N_{yx}b_y$ и примем, что деформация сдвига его состоит из чистого сдвига центральной части, а также изгиба и сдвига выступающих ребер:

$$\gamma = \frac{N_{xy}}{Gt_0} + 2\left(\frac{c_x}{b_x} + \frac{c_y}{b_y}\right),$$

c_x, c_y — перемещения ребер в направлении приложенных усилий, как консольных балок прямоугольного сечения с учетом их изгиба и сдвига [5]:

$$c_x = \frac{N_{xy}\, b_x}{3E}\left(\frac{b_y - s_y}{2}\right)^3 \frac{12}{t_0 s_x^3} \times$$

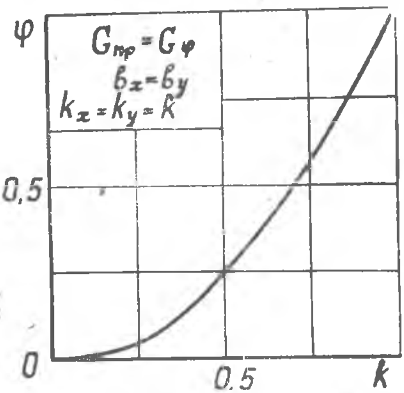
$$\times\left[1+\frac{3(1+\mu)}{5}\left(\frac{2s_x}{b_y - s_y}\right)^2\right].$$

Выражение для c_y записывается аналогично.

После преобразований получаем:

$$N_{xy} = \frac{Et_0\gamma}{2(1+\mu)}\varphi,$$

где



Фиг. 5

$$\varphi = \frac{1}{1+1{,}2\left(\frac{1-k_x}{k_y}+\frac{1-k_y}{k_x}\right)+\frac{1}{2(1+\mu)}\left[\left(\frac{1-k_x}{k_y}\right)^3\left(\frac{b_x}{b_y}\right)^2+\left(\frac{1-k_y}{k_x}\right)^3\left(\frac{b_y}{b_x}\right)^2\right]}.$$

Значения коэффициента φ для случая $b_x = b_y$ и $k_x = k_y = k$ приведены на фиг. 5.

Таким образом, согласно (9), (10) и (11), жесткости отдельного ортотропного слоя имеют вид:

$$B_{11}^s = \frac{Et_s\, k_x}{1-\mu^2 k_x k_y}, \quad B_{12}^s = B_{21}^s = \frac{\mu Et_s\, k_x k_y}{1-\mu^2 k_x k_y},$$
$$B_{22}^s = \frac{Et_s\, k_y}{1-\mu^2 k_x k_y}, \quad B_{33}^s = \frac{Et_s\, \varphi}{2(1+\mu)}. \qquad (12)$$

Рассматривая деформацию изгиба, по аналогии получим

$$D_{11}^s = \frac{Et_s^3\, k_x}{12(1-\mu^2 k_x k_y)}, \quad D_{12}^s = D_{21}^s = \frac{\mu Et_s^3\, k_x k_y}{12(1-\mu^2 k_x k_y)},$$
$$D_{22}^s = \frac{Et_s^3\, k_y}{12(1-\mu^2 k_x k_y)}, \quad D_{33}^s = \frac{Et_s^3\varphi}{6(1+\mu)}. \qquad (13)$$

В случае $k_x = k_y = \varphi = 1$ выражения (12) и (13) дают известные соотношения для изотропной оболочки.

Жесткостные характеристики вафельной оболочки

В общем случае вафельной оболочки с ребрами произвольного поперечного сечения (фиг. 1) коэффициенты заполнения слоев переменны по толщине:

$$k_x = k_x(z), \quad k_y = k_y(z).$$

Рассматривая совокупность отдельных слоев толщиной dz, лежащих на расстояниях z от основной поверхности, и применяя к ним зависимости (12) и (13), получим на основании (4) следующие выражения для жесткостей вафельной оболочки:

$$B_{11} = E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{x1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, dz + B + E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{x2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, dz,$$

$$B_{12} = B_{21} = \mu E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{x1} k_{y1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, dz + \mu B + \mu E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{x2} k_{y2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, dz,$$

$$B_{22} = E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{y1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, dz + B + E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{y2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, dz,$$

$$B_{33} = \frac{E}{2(1+\mu)}\int\limits_{(t_1)} \varphi_1 dz + \frac{1-\mu}{2} B + \frac{E}{2(1+\mu)}\int\limits_{(t_2)} \varphi_2 dz,$$

$$K_{11} = E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{x1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, zdz + E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{x2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, zdz,$$

$$K_{12} = K_{21} = \mu E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{x1} k_{y1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, zdz + \mu E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{x2} k_{y2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, zdz, \quad (14)$$

$$K_{22} = E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{y1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, zdz + E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{y2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, zdz;$$

$$K_{33} = \frac{E}{1+\mu}\int\limits_{(t_1)} \varphi_1 zdz + \frac{E}{1+\mu}\int\limits_{(t_2)} \varphi_2 zdz,$$

$$D_{11} = E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{x1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, z^2dz + D + E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{x2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, z^2dz,$$

$$D_{12} = D_{21} = \mu E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{x1} k_{y1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, z^2dz + \mu D + \mu E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{x2} k_{y2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, z^2dz,$$

$$D_{22} = E\int\limits_{(t_1)} \frac{k_{y1}}{1-\mu^2 k_{x1} k_{y1}}\, z^2dz + D + E\int\limits_{(t_2)} \frac{k_{y2}}{1-\mu^2 k_{x2} k_{y2}}\, z^2dz,$$

$$D_{33} = \frac{2E}{1+\mu}\int\limits_{(t_1)} \varphi_1 z^2dz + 2(1-\mu) D + \frac{2E}{1+\mu}\int\limits_{(t_2)} \varphi_2 z^2dz.$$

Индексы «1» и «2» соответствуют наружным и внутренним слоям. $B = \frac{Et}{1-\mu^2}$ и $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ — жесткости центрального слоя.

Определение критической нагрузки вафельной оболочки

Схема решения задачи устойчивости цилиндрической оболочки методом Ритца изложена во многих работах: [3], [8] и др.

Полагая длину оболочки такой, что граничные условия на торцах $x=0,l$ не оказывают влияния на картину складкообразования в рассматриваемой зоне цилиндра вдали от кромок, принимаем аппроксимирующее выражение для функции прогиба в виде

$$w = f_1 \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{ny}{R} + f_2 \cos\frac{2m\pi x}{l} + f_3 \cos\frac{4m\pi x}{l} + f_4, \tag{15}$$

где f_i — амплитуды прогибов.

Вводя обозначения

$$r = \frac{m\pi R}{l}, \quad \alpha = f_1\frac{n^2}{R}, \quad \beta = f_2\frac{n^2}{R}, \quad \psi = f_3\frac{n^2}{R}, \quad \varepsilon = f_4\frac{n^2}{R}, \tag{16}$$

получаем

$$w = \frac{R}{n^2}\left(\alpha\cos\frac{rx}{R}\cos\frac{ny}{R} + \beta\cos\frac{2rx}{R} + \psi\cos\frac{4rx}{R} + \varepsilon\right), \tag{17}$$

Подстановка (17) в уравнение неразрывности (6) приводит к следующему выражению для функции усилий:

$$\begin{aligned}\Phi = &-\frac{Ny^2}{2} - 12(1-\mu^2)D'_{22}\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}\,\frac{\vartheta^2}{\eta^2}\left[\frac{\alpha(2\beta-1)}{1+2v_1\vartheta^2+\vartheta^4}\cos\frac{rx}{R}\cos\frac{ny}{R} + \right.\\ &+\frac{\alpha^2-8\beta}{32\vartheta^4}\cos\frac{2rx}{R} + \frac{\alpha^2}{32}\cos\frac{2ny}{R} + \frac{2\alpha(\beta+4\psi)}{1+18v_1\vartheta^2+81\vartheta^4}\cos\frac{3rx}{R}\cos\frac{ny}{R} -\\ &\left.-\frac{\psi}{16\vartheta^4}\cos\frac{4rx}{R} + \frac{8\alpha\psi}{1+50v_1\vartheta^2+625\vartheta^4}\cos\frac{5rx}{R}\cos\frac{ny}{R}\right] -\\ &-12(1-\mu^2)D'_{22}\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}\,\frac{\vartheta^2}{\eta}\left[\frac{\vartheta^2F_{21}+F_0+\frac{1}{\vartheta^2}F_{12}}{1+2v_1\vartheta^2+\vartheta^4}\alpha\cos\frac{rx}{R}\cos\frac{ny}{R} + \right.\\ &\left.+\frac{1}{\vartheta^2}F_{21}\beta\cos\frac{2rx}{R} + \frac{1}{\vartheta^2}F_{21}\psi\cos\frac{4rx}{R}\right],\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\vartheta = \frac{r}{n}\sqrt[4]{\frac{A_{22}}{A_{11}}}, \quad \eta = \frac{n^2}{R}\sqrt{12(1-\mu^2)A_{22}D'_{22}}, \quad v_1 = \frac{A_{12}+\frac{A_{33}}{2}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}},$$

$$F_{21} = \frac{K'_{21}\sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}}}{\sqrt{12(1-\mu^2)A_{22}D'_{22}}}, \quad F_0 = \frac{K'_{11}+K'_{22}-K'_{33}}{\sqrt{12(1-\mu^2)A_{22}D'_{22}}}, \quad F_{12} = \frac{K'_{12}\sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}}{\sqrt{12(1-\mu^2)A_{22}D'_{22}}}. \tag{19}$$

Полная энергия системы

$$Э = U - W$$

на основании (7), (8), (17) и (18) в безразмерном виде запишет-ся в форме:

$$\overline{Э} = \frac{ЭR}{12(1-\mu^2)\pi l D_{22}'} = \frac{1}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\alpha^2}{4}(1+2\nu_2\vartheta^2\sqrt{\nu_3}+\vartheta^4\nu_3) + \right.$$

$$\left. + 8\vartheta^4\nu_3(\beta^2+16\psi^2)\right] - \overline{N}^2 - \overline{N}\frac{\vartheta^2}{\eta}\left(\frac{\alpha^2}{4}+2\beta^2+8\psi^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{\eta^2}\left\{\frac{\alpha^2}{4}C_{11}\left[2\beta - 1 + \eta\left(\vartheta^2F_{21}+F_0+\frac{1}{\vartheta^2}F_{12}\right)\right]^2 + \right.$$

$$+ 8\left(\frac{\alpha^2}{32}-\frac{\beta}{4}+\eta\vartheta^2F_{21}\beta\right)^2 + \frac{\alpha^4\vartheta^4}{128} +$$

$$\left. + \frac{\psi^2}{2}(16\eta\vartheta^2F_{21}-1)^2 + C_{19}\alpha^2(\beta+4\psi)^2 + 16C_{125}\alpha^2\psi^2\right\}, \qquad (20)$$

где

$$C_{11} = \frac{\vartheta^4}{1+2v_1\vartheta^2+\vartheta^4},\quad C_{19} = \frac{\vartheta^4}{1+18v_1\vartheta^2+81\vartheta^4},\quad C_{125} = \frac{\vartheta^4}{1+50v_1\vartheta^2+625\vartheta^4},$$

$$v_2 = \frac{D_{12}'+\frac{D_{33}'}{2}}{\sqrt{D_{11}'D_{22}'}},\quad v_3 = \frac{A_{11}D_{11}'}{A_{22}D_{22}'},\quad \overline{N} = NR\sqrt{\frac{A_{11}}{12(1-\mu^2)D_{22}'}}, \qquad (21)$$

Условие минимума энергии приводит к соотношениям

$$\frac{\partial\overline{Э}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\overline{Э}}{\partial\beta} = \frac{\partial\overline{Э}}{\partial\psi} = \frac{\partial\overline{Э}}{\partial\eta} = \frac{\partial\overline{Э}}{\partial\vartheta} = 0. \qquad (22)$$

Выражение (22) представляет собой систему пяти нелинейных алгебраических уравнений с шестью произвольными параметрами α, β, ψ, η, ϑ и $\overline{N}$. Задаваясь рядом значений параметра ϑ и решая систему относительно α, β, ψ, η и $\overline{N}$, получим численную зависимость $\overline{N} = \overline{N}(\vartheta)$. Минимум этой зависимости дает искомое значение нижней критической нагрузки.

Численное решение

Решение системы (22) проводилось итерационным методом Зейделя на ЭЦВМ М-20.

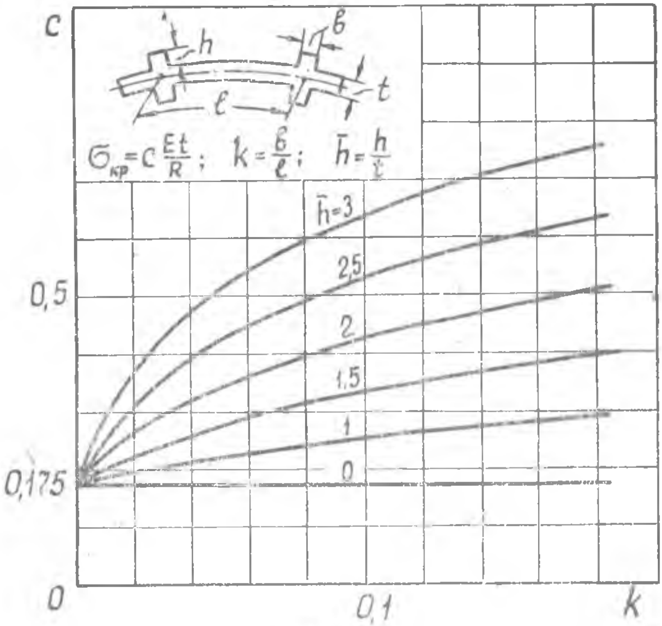
На фиг. 6, 7, 8 и 9 представлены результаты численного решения для частного случая цилиндрической вафельной оболочки с ребрами прямоугольного поперечного сечения, образующими квадратные клетки ($v_3 \equiv 1$).

Кривые $c = c(k, h)$, приведенные на фиг. 6 и 7, позволяют определить критические напряжения вафельной оболочки по формуле

$$\sigma_{кр} = c\frac{Et}{R}.$$

Фиг. 6 соответствует симметричному расположению ребер, фиг. 7 — одностороннему. Как показали вычисления, вафельные оболочки с наружным и внутренним расположением ребер имеют практически одинаковую несущую способность.

Для оценки весовой эффективности вафельной оболочки введен безразмерный параметр g, представляющий собой отношение веса гладкой изотропной оболочки к весу вафельной оболочки, имеющей такую же несущую способность на сжатие.



Фиг. 6.

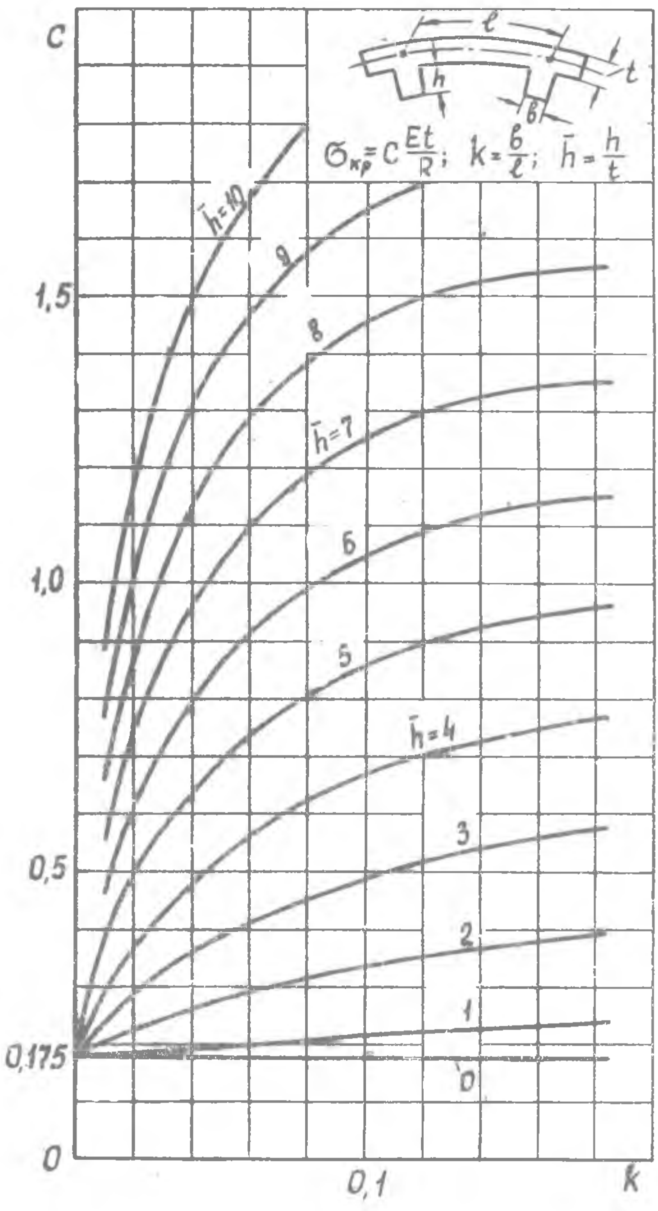
Кривые $g=g\ (\overline{H}, \overline{e})$, приведенные на фиг. 8 ($k=0{,}05$), показывают преимущества одностороннего расположения ребер ($\overline{e}=\pm 1$) по сравнению с симметричным ($\overline{e}=0$).

Кривые $g=g\ (k, \bar{h})$ фиг. 9 дают возможность выбрать оптимальный шаг ребер вафельной оболочки.

В качестве примера можно отметить, что вафельная оболочка с параметрами $\overline{e}=\pm 1$, $k=0{,}04$ и $\bar{h}=5$ обладает весовой эффективностью $g=1{,}5$, т. е. может быть выполнена по весу на 33% легче гладкой оболочки. В случае сохранения веса вафельная оболочка с указанными параметрами будет иметь несущую способность в $g^2=2{,}25$ раза выше, чем гладкая.

Проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1. Вафельные оболочки эффективны лишь в случае высоких ребер ($\bar{h}>1{,}5$).

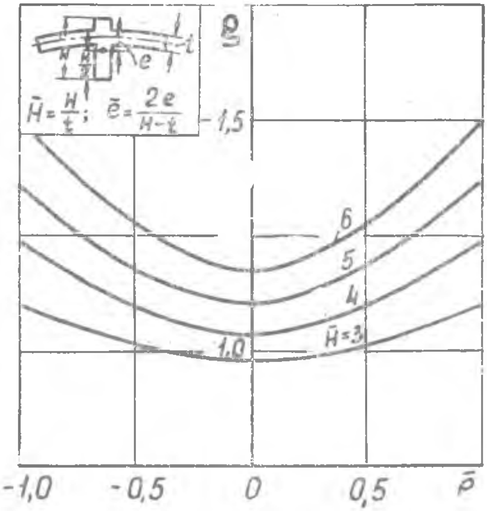


C
1,5
1,0
0,5
0,175
0
0,1
k
$\sigma_{кр} = C\frac{Et}{R}$; $k = \frac{b}{l}$; $\bar{h} = \frac{h}{t}$
l
t
h
b
$\bar{h}=10$
9
8
$\bar{h}=7$
6
5
$\bar{h}=4$
3
2
1
0

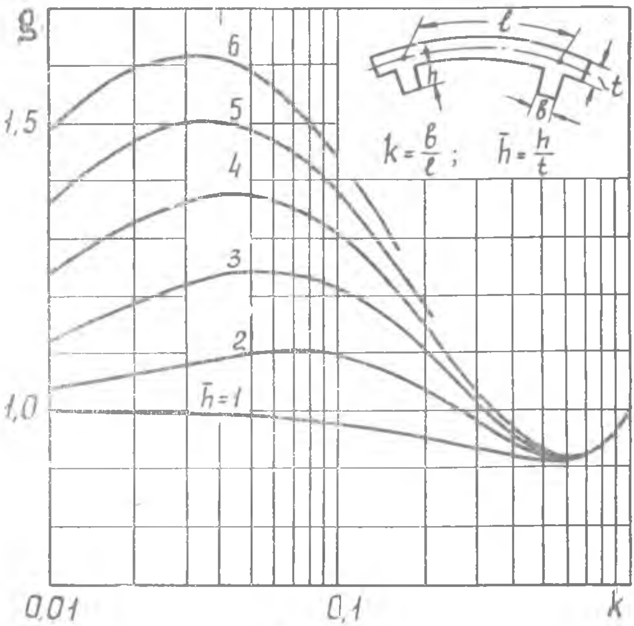
Фиг. 7.

2. При проектировании вафельных оболочек следует применять одностороннее расположение ребер.

3. Несущая способность вафельных оболочек с наружным и внутренним расположением ребер практически одинакова.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

4. Наибольшая эффективность вафельных оболочек достига-ется при шаге ребер, соответствующем параметру k=0,01÷0,10

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Биргер. Круглые пластинки и оболочки вращения. Оборонги-1961.

2. Б. М. Броуде. Практические методы расчета тонких оболочек на усто-чивость. «Исследования по стальным конструкциям», вып. 13, Госстройиздат, 196

3. А. С. Вольмир. Устойчивость деформируемых систем. Издательст «Наука», 1967.

4. О. И. Теребушко. К расчету на устойчивость и проектирование цили-дрических подкрепленных оболочек. «Расчет пространственных конструкций вып. VII, 1962.

5. С. П. Тимошенко. Теория упругости, ГТТИ, 1934.

6. B. Geier. Das Beulverhalten versteifter Zylinderschalen, Zeitschrift f Flugwissenschaften, 14, N 7, 1966.

7. L. A. Harris, H. S. Suer, W. T. Skene, R. I. Bendjamin The stability of thin—walled unstiffened circular cylinders under axial compressi including the effect of internal pressure, jAS, v. 24, N 8, 1957.

8. J. Kempner. Postbuckling behavior of axially compressed shells, JA v. 21, № 5, 1954.