ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. I, 1974

С.И.Иванов, М.П.Шатунов, В.Ф.Павлов

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ ОБРАЗЦОВ С НАДРЕЗОМ

После обработки детали методами поверхностного пластического деформирования наблюдается увеличение выносливости. Причинами этого увеличения считают остаточные напряжения и наклеп. Интересно знать роль каждого из указанных факторов, что представляется важным не только для теории, но и для практики. В настоящей статье изложены результаты изучения влияния остаточных напряжений на выносливость при изгибе.

Для создания остаточных напряжений в ненаклепанном материале применялся известный способ, заключающийся в нанесении на цилиндрический образец с упрочненной поверхностью надреза, глубина которого превышает толщину наклепанного слоя [I] . На дне надреза возникают значительные остаточные напряжения, являющиеся результатом перераспределения остаточных усилий гладкого образца. При этом материал образца на дне надреза, если надрез изготовлен безнаклепным способом, находится в ненаклепанном состоянии.

Сначала решим задачу о перераспределении остаточных усилий для надреза в форме полуэллипса (рис. I):

$$y = a\cos\theta, \quad z = b\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

На полуэллипсе действует симметричная относительно $\theta = 0^*$ нагрузка $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$, эквивалентная удалению материала в пределах надреза. Ее можно выразить через осевые остаточные напряжения гладкой детали $\sigma_z(y)$. Ограничимся рассмотрением

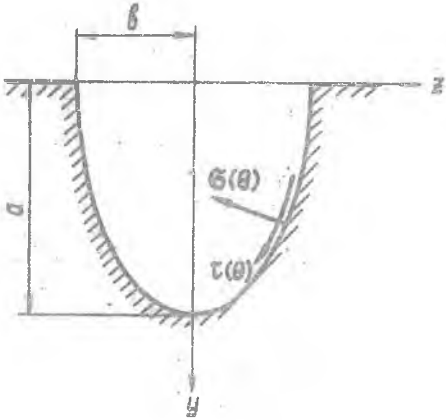

Рис. I.

мелких надрезов, в этом случае осесимметричную задачу можно заменить плоской (плоская деформация) для полуплоскости с вырезом (рис. I), нагруженным самоуравновешенными силами [2] . Часть контура $y=0$, $|z| \geqslant b$ не нагружена.

Воспользуемся решением Мусхелишвили [3] для внешности полного эллипса:

$$\sigma_\rho - i\tau_{\rho\theta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\zeta}{\bar\zeta\,\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\psi(\zeta)\right], \quad (I)$$

$$\sigma_\theta + i\tau_{\rho\theta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\zeta}{\bar\zeta\,\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\psi(\zeta)\right], \quad (2)$$

где $\omega(\zeta) = R(\zeta + c\zeta^{-1})$ - функция, отображающая внешность единичной окружности γ плоскости $\zeta = \rho e^{i\theta}$ на внешность полного эллипса плоскости $y + iz$; $a = R(1+c)$, $b = R(1-c)$, $-1 < c < 1$; $\Phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ - произвольные аналитические функции в области $|\zeta| > 1$, представляемые в виде рядов по отрицательным степеням ζ . В нашем случае эти ряды имеют вещественные коэффициенты и начинаются с ζ^{-2} .

Положим:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta), \quad \psi_1(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi_1'(\zeta), \quad (3)$$

где $\Phi_1(\zeta)$, $\Psi_1(\zeta)$ - нечетные; $\Phi_2(\zeta)$, $\Psi_2(\zeta)$ - четные функции от ζ. Из (2) и (3) при $\zeta = i\rho$ получим

$$\tau_{\rho\theta}(i\rho)=0, \quad \sigma_\theta(i\rho)=2\Phi_2(i\rho)+\frac{1-c\rho^{-2}}{1+c\rho^{-2}}\, i\rho\Phi_2'(i\rho)-\Psi_2(i\rho). \qquad (4)$$

При $\zeta = t = e^{i\theta}$ из (I) и (3) получим

$$\Phi_2(t)+\overline{\Phi_2(t)}-\frac{1+ct^2}{1-ct^2}\, t\,\Phi_2'(t)-\frac{t^2-c}{1-ct^2}\,\Psi_2(t)=\overline{f(t)}, \qquad (5)$$

где $f(t)=\sigma_\rho(t)+i\tau_{\rho\theta}(t)-\Phi_1(t)-\overline{\Phi_1(t)}+(1+c)\dfrac{t+t^{-1}}{t-ct^{-1}}\,\overline{t\,\Phi_1'(t)}$, (6)

$\sigma_\rho(t)=\sigma(\theta)$, $\tau_{\rho\theta}(t)=\tau(\theta)$. Функцию $\Phi_1(\zeta)$ временно считаем заданной.

Равенство (6) определяет $f(t)$ только на полуокружности $\gamma_1\left(t=e^{i\theta},\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$. Продолжим ее на полную окружность γ по закону $f(-t)=f(t)$ Соответствующая продолженной функции нагрузка на полном эллипсе будет симметричной и самоуравновешенной. Равенство (5) можно рассматривать как граничное условие для $\Phi_2(\zeta)$, $\Psi_2(\zeta)$ на полной окружности, откуда они легко определяются [3]:

$$\Phi_2(\zeta)=-\frac{1}{1-c\zeta^{-2}}\,\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{(t-ct^{-1})f(t)}{t^2-\zeta^2}\,dt$$

$$\Psi_2(\zeta)=\frac{1}{1-c\zeta^{-2}}\,\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\overline{(t-ct^{-1})f(t)}}{t^2-\zeta^2}\,dt+\frac{\zeta^{-2}-c}{1-c\zeta^{-2}}\Phi_2(\zeta)-\frac{\zeta^{-2}+c}{1-c\zeta^{-2}}\,\zeta\Phi_2'(\zeta) \qquad (7)$$

Напряжения, определяемые по формулам (I) - (3), (6)-(7), точно удовлетворяют всем граничным условиям, кроме $\sigma_\theta(i\rho)=0$, при любой $\Phi_1(\zeta)$. Из самоуравновешенности $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ и характера затухания $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ при $\zeta\to\infty$ следует равенство нулю равнодействующей:

$$\int_1^\infty (1+c\rho^{-2})\,\sigma_\theta(i\rho)\,d\rho=0. \qquad (8)$$

При $\Phi_1(\zeta)=0$ указанные формулы дают приближенные напряжения, которые будем называть главными частями точных.

Полагая

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{n=1,3,\ldots}^{2m+1} a_n\,\zeta^{-n-\ldots}. \qquad (9)$$

воспользуемся значениями a_n для уточнения. Выберем их так, чтобы $\sigma_\theta(i\rho)$ были локализованы лишь на малом участке граничной прямой. Для этого потребуем, чтобы в разложении $(1+c\rho^{-2})\sigma_\theta(i\rho)$ в степенной ряд коэффициенты при ρ^{-k} ($k=2$, $4,\dots,2m+2$) обратились в нуль.

Из (4), (7) найдем

$$(1+c\rho^{-2})\sigma_\theta(i\rho)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{[(t-ct^{-1})f(t)+\overline{(t-ct^{-1})f(t)}]dt}{t^2+\rho^2}+(1+c)[(\rho-\rho^{-1})\Phi_2(i\rho)]'_\rho \quad (10)$$

$$(1+c\rho^{-2})\int\limits_\rho^\infty(1+c\rho^{-2})\sigma_\theta(i\rho)d\rho=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}[(t-ct^{-1})f(t)+\overline{(t-ct^{-1})f(t)}]dt(1+c\rho^{-2})\int\limits_\rho^\infty\frac{d\rho}{\rho^2+t^2}+$$

$$+(1+c)\frac{\rho-\rho^{-1}}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{(t-ct^{-1})f(t)}{\rho^2+t^2}dt=\sum_{k=0,2,\dots}^{\infty}\rho^{-k-1}(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}(t-ct^{-1})f(t)q_k(t)dt, \quad (11)$$

где

$$q_0(t)=c-t^{-2},\; q_k(t)=\left(\frac{k}{k+1}+c\right)t^k+\left(1+\frac{k}{k-1}c\right)t^{k-2}+\frac{c}{k-1}t^{-k}-\frac{1}{k+1}t^{-k-2};\; k=2,4,\dots \quad (12)$$

Система уравнений, получаемая приравниванием нулю коэффициентов при первых $m+1$ степенях функции (10), эквивалентна аналогичной системе, получаемой из ряда (11). Последняя проще:

$$(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}(t-ct^{-1})f(t)q_k(t)dt=0; \quad k=0,2,4,\dots,2m \quad (13)$$

Из (6), (9) определим

$$(t-ct^{-1})f(t)=(t-ct^{-1})[\sigma+i\tau]-\sum_{n=1,3,\dots}^{2m+1}a_nf_n(t), \quad (14)$$

где $f_n(t)=(t-ct^{-1})(t^{n+2}+t^{-n-2})+(1+c)(n+2)(t+t^{-1})t^{n+2}$ (15)

$$(t-ct^{-1})[\sigma+i\tau]=-i(1+c)\sin\theta\,\sigma_z. \quad (16)$$

Подставим (14) в (13), вычислим интеграл

$$(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}f_n(t)q_k(t)dt=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{c^2}{n+4}\right)\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n+2}, & k=0\\[2ex] \dfrac{32}{\pi}\left(\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{2c}{n+2-k}+\dfrac{c^2}{n+4-k}\right)\dfrac{k(n+2)(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+k)(n+k+2)(n+k+4)}, & k=2,4,\dots\end{cases} \quad (17)$$

и произведем замену $(-1)^{\frac{n+1}{2}}(n+2)a_n = X_n$. Тогда получим

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{2m+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{c^2}{n+4}\right)\frac{X_n}{(n+2)^2}=A_0;\quad A_0=\frac{1}{8i}\int_{\gamma_1}(t-ct^{-1})[\sigma+i\tau]q_0(t)dt \quad (18)$$

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{2m+1}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{2c}{n+2-k}+\frac{c^2}{n+4-k}\right)\frac{k^4}{(n+k)(n+k+2)(n+k+4)}X_n=A_k;\ A_k=k^3\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{32i}\int_{\gamma_1}(t-ct^{-1})[\sigma+i\tau]q_k(t)dt. \quad (19)$$

При двукратной дифференцируемости $\sigma(\theta)$, $\tau(\theta)$ величины A_k ограничены. Система (18), (19) имеет простую структуру и легко решается на ЭВМ в матричном виде: $[X_n]=[A_{kn}]^{-1}[A_k]$, где $[A_{kn}]$ – матрица коэффициентов системы.

Систему (19) можно привести путем комбинации уравнения с индексами k, $k-2$ к виду

$$X_{k-1}=\sum_{n=1,3,\ldots;\ n\neq k-1}^{2m+1}B_{kn}X_n+B_k,\quad \text{где}\quad \sum_{n=1,3,\ldots;\ n\neq k-1}^{\infty}|B_{kn}|<1,\quad |B_k|\leq\frac{B}{k}.$$

При $m=\infty$ эта система, а значит и система (19), имеет ограниченное решение X_n, которое автоматически удовлетворяет уравнению (18). Например, при $c=0$ можно взять такую комбинацию:

$$B_{2n}=-\frac{A_{2n}}{A_{21}}=\frac{3\cdot5\cdot7}{(n-2)(n+2)(n+4)(n+6)}$$

$$B_{kn}=-\frac{\frac{k+4}{k^4}A_{kn}-\frac{k-3}{(k-2)^4}A_{k-2,n}}{\frac{k+4}{k^4}A_{k,k-1}-\frac{k-3}{(k-2)^4}A_{k-2,k-1}}=\frac{(4k^2-1)(4k^2-9)}{4k^2+2k-21}\,\frac{(2n-k)^2+3n^2+12n-16}{(n-k)(n-k+2)(n+k-2)(n+k)(n+k+2)(n+k+4)}.$$

Путем разложения общего члена на элементарные дроби просуммируем ряд $\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}A_{kn}=-\frac{k^4}{4(k+1)^2(k+3)}$, $(k=2,4,\ldots)$, с помощью которого найдем

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}B_{2n}=-\frac{7}{12}<0;\quad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}B_{kn}=-\frac{(4k^2-1)(4k^2-9)}{4k^2+2k-21}\,\frac{k^2+2k+13}{(k^2-1)^2(k+3)}<0,\quad (k=4,6,\ldots).$$

При $n\neq k-1$ все $B_{kn}>0$, а $B_{k,k-1}=-1$. Отсюда и из отрицательности предыдущих рядов имеем:

$$\sum_{n=1,3,\ldots;\ n\neq k-1}^{\infty}B_{kn}<1,\quad (k=2,4,\ldots).$$

Приведём расчетную формулу для $\sigma_\theta(\zeta)$ при вещественных $\zeta \geqslant 1$:

$$\sigma_\theta(\zeta)=\frac{1+c}{1-c\zeta^{-2}}\left[\lambda(\zeta)+\sum_{n=1,3,\dots}^{2m+1} X_n\lambda_n(\zeta)\right], \tag{20}$$

где $\lambda(\zeta)=2u(\zeta)+(1-c)\left[\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-c}\zeta u(\zeta)\right]'$, $u(\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma_z(\theta)\frac{(1+\zeta^2)\sin^2\theta\,d\theta}{1-2\zeta^2\cos 2\theta+\zeta^4}=$

$$=\sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty}\sigma_{zk}\zeta^{-k-2}, \qquad \sigma_{zk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma_z(\theta)\sin\theta\sin(k+1)\theta\,d\theta \tag{21}$$

$$\lambda_n(\zeta)=u_n(\zeta)+\frac{1-c}{1+c}\left[\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-c}\zeta V_n(\zeta)\right]'$$

$$u_n(\zeta)=\frac{2}{\pi(n+2)}\int_0^1\left(\frac{1}{t^2+\zeta^2}+\frac{1}{1+t^2\zeta^2}\right)\left[(n+3)t^2-n-1\right]t^{n+1}dt$$

$$V_n(\zeta)=\frac{2}{\pi(n+2)}\int_0^1\left[\frac{1+ct^2}{1+t^2\zeta^2}+\frac{(n+3+(n+2)c)t^2-(n+2+(n+1)c)}{t^2+\zeta^2}\right]t^{n+1}dt. \tag{22}$$

Эти соотношения получены на (2), (3), (7), (9), (I4)- (I6). Интегралы по γ_1, содержащие $f_n(t)$, с помощью вычетов преобразованы в интегралы по диаметру γ_1.

Применяя интегрирование по частям, легко показать, что при возрастании n функции $\lambda_n(\zeta)$ убывают как $\frac{1}{n^3}$, а при $\zeta=1$ -как $\frac{1}{n^4}$, причем

$\lambda_n(1)=\frac{8}{\pi(n+2)}\int_0^1\frac{(n+3)t^2-n-1}{1+t^2}t^{n+1}dt$ не зависит от c

Даже первые функции $\lambda_n(\zeta)$ малы, например:

$\lambda_1(1)=0{,}03881$; $\lambda_3(1)=0{,}00646$; $\lambda_5(1)=0{,}00186\dots$

Так как X_n ограничены, в формуле (20) наиболее существенно первое слагаемое - главная часть $\sigma_\theta(\zeta)$. Выразив $[X_n]=[A_{kn}]^{-1}[A_k]$, приведем (20) к виду

$$\sigma_\theta(\zeta)=\frac{1+c}{1-c\zeta^{-2}}\left[\lambda(\zeta)+\sum_{k=0,2,\dots}^{2m}A_k\mu_k(\zeta)\right], \tag{23}$$

где

$A_0=\frac{\pi(1+c)^2}{8}\sigma_{z0}$, $A_k=(-1)^{\frac{k}{2}}k^3\frac{\pi(1+c)^2}{32}(\sigma_{zk}+\sigma_{z\,k-2})$, $(k=2,4,\dots)$.

Значения $\mu_k(\zeta)=[\lambda_n(\zeta)][A_{kn}]^{-1}$ при $\zeta=1$ были вычислены на ЭВМ. Оказалось, что $\mu_0(1)=0{,}37$ значительно преобладает над другими $\mu_k(1)$ и практически не зависит от c и m. Из уточняющих членов $\mu_k(1)A_k$ некоторое значение имеет только $A_0\mu_0(1)$.

При $\xi = 1$ из (2I), (23), учитывая перечисленные обстоятельства, получим

$$\sigma_\theta(1) = \sqrt{\frac{t}{\rho}} \int_0^1 \left[\frac{4}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + 0{,}37 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(1+\sqrt{\frac{\rho}{t}})^2} \right] \sigma_z(\xi)\, d\xi \,, \qquad (24)$$

где $\xi = \frac{y}{t}$; $t = a$; $\rho = \frac{b^2}{a}$ - глубина надреза и радиус кривизны у дна надреза. Здесь ρ, t имеют другой смысл, чем раньше.

Выносливость при изгибе изучалась на стандартных образцах диаметром 10мм , изготовленных из отожженной ст.45. Остаточные напряжения, эпюра которых изображена на рис. 2, создавались

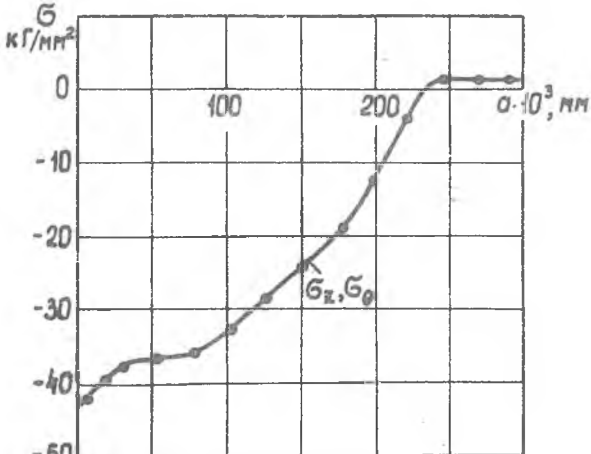

Рис. 2.

дробеструйной обработкой. Глубина наклепанного слоя, установленная измерением микротвердости, не превышала 0,25мм. На упрочненные образцы наносились надрезы полукруглой и полуэллиптической формы. Надрез выполнялся вначале резцом, а затем доводился электрополированием, чтобы удалить тонкий наклепанный слой от обработки резцом. Аналогичные надрезы наносились на неупрочненные образцы, которые предварительно подвергались электрополированию для снятия остаточных напряжений, возникающих после токарной обработки.

Результаты усталостных испытаний описанных образцов содержатся в таблице I, где кроме пределов выносливости приведены остаточные напряжения на поверхности дна надреза, вычисленные по формуле (24) с использованием эпюры σ_1, изображенной на рис. 2.

Таблица I

№ партии	Размеры надреза, мм		Неупрочненные	Упрочненные		ψ
	t	ρ	σ_{-1}, кг/мм^2	$\sigma_\theta(1)$ кг/мм^2	σ_{-1} кг/мм^2	
I	0,3	0,3	I2	-27,5	I6,5	0,I64
2	0,5	0,5	I2,5	-I4,5	I5	0,I72
3	0,8	0,2	II	-I4,3	I3,5	0,I75

Можно видеть, что влияние остаточных напряжений на предел выносливости образцов из ненаклепанного материала с надрезом оказалось существенными. Отношение приращения предела выносливости к соответствующему остаточному напряжению $\psi = \Delta\sigma_{-1} / |\sigma_\theta(1)|$ в среднем равно 0,I7.

Литература

I. Кудрявцев И.В. Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении. Машгиз, I95I.

2. Нейбер Г. Концентрация напряжений. Гостехиздат, I947.

3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости . Физматгиз, М., I966.