4. *Петунин А. Н.* Методы и техника измерений параметров газового потока. М., «Машиностроение», 1972.
5. *Борисенко А. И.* Газовая динамика двигателей. ГНТИ, М., Оборонгиз, 1962.
6. *Абрамович Г. Н.* Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
7. *Там К.* Шум сверхзвуковых струй на режимах, близких к расчетным. Экспресс-информация, серия «Авиастроение», № 12, 1974.

УДК 621.45:533.697.4.001.24

Н. Г. Салманова, Ю. И. Цыбизов

К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЛ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

k — показатель адиабаты;
М, α — число Маха и угол Маха;
φ — угол расширения потока в течении Прандтля-Майера;
w — скорость потока;
θ — угол наклона вектора скорости к оси;
r, $\bar{r}$ — текущий радиус;
a — скорость звука,
λ — коэффициент скорости;
ρ, P, I — плотность, давление и импульс.

ИНДЕКСЫ:

0 — параметры заторможенного потока;
кр — критический параметр.

Плоские сопла Лаваля находят широкое применение в ракетной технике, в пневмонике, в эжекторных установках и т. д. В последнее время плоским соплам уделяется повышенное внимание в связи с тем, что они нашли применение для ускорения газового потока в аэродинамических сверхзвуковых шлюзах мощных лазеров [1]. Профилирование и расчет течения этих сопл производится хорошо разработанным методом характеристик с помощью ЭВМ, а результаты расчета обычно представлены в виде таблиц для ряда значений чисел М и показателей адиабаты течения k.

Однако в настоящее время для практики имеют значения такие методы, которые позволяют быстро рассчитать профиль сопла и течение в нем для любого значения числа М и величины k. В данной работе предпринята попытка разработки подобной методики и представлены некоторые результаты расчета.

ПРОФИЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ

Задача профилирования сверхзвуковой части сопла с плоской переходной поверхностью и равномерным потоком на выходе с заданным числом M разбивается на две (рис. 1):

1) расчет разгонного участка ABB_1C;
2) расчет выравнивающего участка MM_1DD_1.

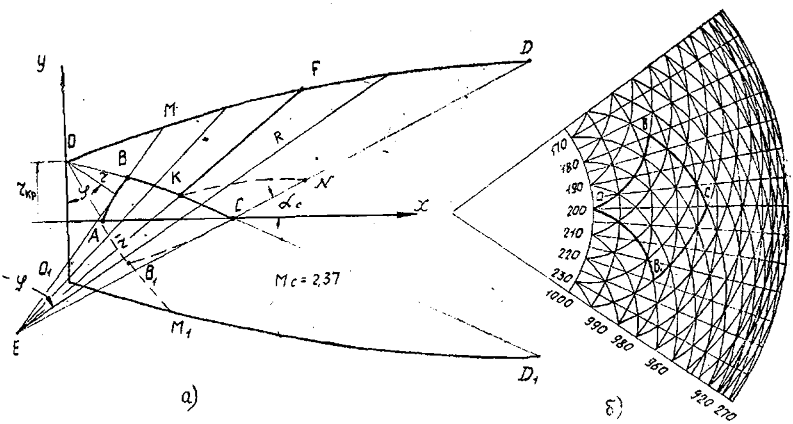

Рис. 1. Сверхзвуковая часть сопла Лаваля: *а*) физическая плоскость течения; *б*) годограф скорости

1. Разгонный участок сопла

Будем считать, что осуществляется течение расширения однородного идеального сверхзвукового потока около угловых точек O и O_1 (рис. 1, а). Тогда разгон потока от плоской переходной поверхности до заданного числа M_c происходит в области ABB_1C взаимодействия центрированной простой волны разряжения от точек O и O_1 физической плоскости течения. Области ABB_1C соответствует область $авв_1с$ (рис. 1, б) плоскости годографа скорости. В случае однородного потока на выходе из сопла (т. е. при прямолинейной характеристике CD физической плоскости) углы отклонения потока возмущающими точками O и O_1 равны и, следовательно, справедливо равенство:

$$\Theta_b = \Theta_{b_1} = \frac{1}{2}\Theta_c = \frac{1}{2}\left[m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M_c^2-1}}{m} - \operatorname{arctg}\sqrt{M_c^2-1}\right], \quad (1)$$

где $m=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$.

Равенство (1) позволяет определить границы области $a в в_1 c$ годографа.

Для расчета течения в физической плоскости введем полярную систему координат переменных r и φ. Дифференциальное уравнение характеристик в простой волне имеет вид [2]:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}=\operatorname{ctg} 2\alpha. \tag{2}$$

Интегрируя равенство (2), имея в виду, что $\operatorname{ctg}\alpha = m\operatorname{tg}/\varphi m$, получим

$$r=\frac{c}{\sqrt{\sin\varphi/m\cdot(\cos\varphi/m)^{m^2}}}=\frac{c}{(\lambda^2-1)^{1/2}(1-\lambda^2/m^2)^{\frac{m^2}{2}}}=\frac{c}{j(\varphi)}, \tag{3}$$

где c — произвольная постоянная интегрирования;

$j(\varphi)$ — вспомогательная функция.

Для простой центрированной волны разрежения, например OAB (рис. 1, а), константа c в выражении (3) определяется следующим образом.

Принимаем, что начальная точка A взаимодействия веера волн разрежения от точек O и O_1 принадлежит линии тока в течении Прандтля-Майера, уравнение которой

$$r=r_{\text{кр}}(\cos\varphi/m)^{-m^2}. \tag{4}$$

Тогда при $\varphi=\varphi_A$ и $r=r_A$ из совместного рассмотрения равенств (3) и (4) получим:

$$c=r_{\text{кр}}\sqrt{\frac{\sin\varphi_A/m}{(\cos\varphi_A/m)^{m^2}}}=r_{\text{кр}}\gamma(\varphi_A). \tag{5}$$

В дальнейшем принимаем $r_{\text{кр}}=1$; $\gamma(\varphi)=\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{(1-\lambda^2/m^2)^{m^2}}}$ — вспомогательная функция, исследованная С. А. Христиановичем в работе [3].

Поместив начало полярной системы координат в точку O и учитывая равенства (3—5), получим уравнение характеристики AB:

$$r=\gamma(\varphi_A)/j(\varphi),\quad(\varphi_A\leqslant\varphi\leqslant\varphi_B). \tag{6}$$

Угол наклона начальной характеристики φ_A можно принять равным 1^0. Значение угла φ_B определяется из условия (1) по формуле:

$$\varphi_B+\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg}\varphi_B/m)=\frac{1}{2}\left[m\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{M_c^2-1}}{m}-\operatorname{arctg}\sqrt{M_c^2-1}\right].$$

Кривая BC области ABB_1C имеет новую систему полярных координат с началом в точке E. Угол между радиусом-вектором $\bar{r}_B$ новой системы и r_B старой системы координат в общей точке B равен $2\alpha_B = 2\,(\arcsin 1/M_B)$.

Уравнение кривой BC имеет вид:

$$\bar{r} = R_E \cdot 1/j(\varphi), \quad (\varphi_B \leqslant \varphi \leqslant \varphi_C). \tag{7}$$

Постоянная R_E в (7) определяется из условия равенства расходов через характеристики AB и BC и равна:

$$R_E = \frac{[\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)]}{[\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)]} \cdot \gamma(\varphi_C).$$

2. *Выравнивающий участок сопла*

Стенка сопла $OMД$ является линией тока. Участок OM имеет прямолинейную границу, где угол MOB равен α_B. Стенка сопла МД представляет линию тока в течении Прандля-Майера и рассчитывается в системе координат с началом в точке E по формуле:

$$R = [(r_B + \bar{r}_B)(\cos \varphi_B/m)^{m^2}]\,(\cos \varphi/m)^{-m^2}. \tag{8}$$

Подобным же образом строится и нижняя половина сопла. Перейдем к декартовой системе координат, направив ось абсцисс вдоль оси симметрии сопла и совместив ось ординат с плоскостью критического сечения (рис. 1 а).

Тогда координаты сверхзвуковой части сопла вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\bar{x} = \frac{x}{r_{кр}} = {} & \left\{ \frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_B)} + \left[\frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)}\right] \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_B)} \right\} \left(\frac{\cos \varphi_B/m}{\cos \varphi/m}\right)^{m^2} \cos \times \\
& \times \left[2 \operatorname{arc\,ctg} m\,(\operatorname{tg} \varphi_B/m) - (\varphi - 2\varphi_B) - \frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)}\right] \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_B)} \times \\
& \times \cos \left[\operatorname{arc\,ctg} m\,(\operatorname{tg} \varphi_B/m) + \frac{1}{2}\left(m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M_c^2 - 1}}{m} - \right.\right. \\
& \left.\left. - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{M_c^2 - 1}\right)\right] - \frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_B)} \sin \varphi_B ;
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y} = \frac{y}{r_{кр}} = {} & \left\{ \frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_B)} + \left[\frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)}\right] \cdot \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_B)} \right\} \left(\frac{\cos \varphi_B/m}{\cos \varphi/m}\right)^{m^2} \times \\
& \times \sin \left[2 \operatorname{arc\,ctg} m\,(\operatorname{tg} \varphi_B/m) - (\varphi - 2\varphi_B) - \frac{\pi}{2}\right] - \\
& - \left[\frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)}\right] \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_C)} \cdot \frac{1}{M_C}.
\end{aligned}$$

Координата точки C, расположенной на оси сопла, в которой достигается расчетная скорость истечения из сопла, определяется по формуле

$$x_C = x - \left[\frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)}\right] \cdot \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_C)} \cdot \cos\left(\arcsin \frac{1}{M_C}\right),$$

где X определяется по формуле (9) при $\varphi = \varphi_c$.

Кривизна стенки K профилированной сверхзвуковой части рассчитывается по формуле:

$$K' = \frac{\sin 2\alpha \cos\alpha}{(k+1)R} = \frac{2}{(k+1)} \frac{(M^2-1)}{M^2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\left\{\frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_A)} + \left[\frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)}\right] \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_B)}\right\} \left(\frac{\cos\varphi_C/m}{\cos\varphi/m}\right)^{m^2}}\right].$$

Контроль правильности построения осуществляется:

1. Вычислением расхода через замыкающую характеристику CD

$$G_{CD} = \frac{1}{2} \rho_C a_C (R_{CD} - \bar{r}_C) = \frac{1}{2} G_{\text{кр}}.$$

2. Вычислением угла наклона замыкающей характеристики к оси сопла

$$\alpha_C = [2\alpha_B - \frac{\pi}{2} - (\varphi_C - 2\varphi_B)].$$

Сопоставление контуров сверхзвуковых частей сопла, профилируемых другими методами, и сравнение расчетных и экспериментально полученных распределений давлений вдоль стенки сопла проведено в работе [4].

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ И ЗАВИСИМОСТЬ ВЫХОДНОГО ИМПУЛЬСА ОТ ДЛИНЫ СОПЛА

Зависимости параметров сверхзвукового потока от угла расширения имеют вид: скорость звука $a, a_{\text{кр}} = \cos\varphi/m$; плотность потока $\rho = \rho_0 \left(\frac{1+\cos 2\varphi/m}{k-1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$; коэффициент скорости потока $\lambda = \frac{w}{a_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{k-\cos 2\varphi/m}{k-1}}$; давление $P = P_0 \left(\frac{1+\cos 2\varphi/m}{k-1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$.

Такое представление параметров потока и зависимость (9) текущих координат сверхзвуковой части сопла от угла φ позволяет построить распределение параметров вдоль стенки.

Для практических задач приходится ограничивать длину сверхзвуковой части, и течение на выходе из сопла отличается от равномерного. В связи с этим необходимо знать влияние длины укорочения на потери импульса.

Рассмотрим задачу об определении выходного импульса в зависимости от длины.

За контрольный контур укороченного сопла принимаем контур FKC (рис. 1, а), составленный из прямолинейной характеристики второго семейства KE и криволинейной характеристики первого семейства KF (в силу симметрии, рассматривается только верхняя половина сопла). Тогда выходной импульс можно записать как сумму:

$$\frac{1}{2} I_{\text{вых}} = I_{FK} + I_{KC}. \tag{10}$$

Импульс определяется по формуле

$$I = \int_s (P + \rho a w \cos\Theta) ds. \tag{11}$$

В формуле (11) $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi$ — элемент дуги криволинейной характеристики BC.

В случае прямолинейной характеристики параметры потока вдоль нее постоянны и соотношение (11) для I принимает вид:

$$I_{KF} = (P_F + \rho_F a_F w_F \cos\Theta_F) r_{KF}.$$

Для криволинейной характеристики KC справедливо выражение:

$$I_{KC} = \int_{\varphi_k}^{\varphi_c} (P + \rho \cdot a \cdot w \cdot \cos\Theta) \cdot \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{12}$$

Чтобы упростить операцию вычисления импульса $I_{\text{кс}}$ по формуле (12), поступим следующим образом.

Выделим линию тока KN в течении Прандтля-Майера около возмущающей точки E и проходящую через точку K (рис. 1 а).

Для области KC контурный интеграл

$$\oint_s (P + \rho a w \cos\Theta) ds = R_{KC} + I_{KC} - I_{CN} = 0 \tag{13}$$

состоит из интегралов по характеристикам KC, CN и по линии тока KN.

Так как $R_{KN} = I_{EN} - I_{EK}$, то из (13) следует, что

$$I_{KC} = I_{EK} - I_{EN} + I_{CN} = I_{EK} - I_{EC}.$$

Подставляя выражения для I_{KF} и I_{KC} в выражение (10), окончательно получим

$$\frac{1}{2} I_{\text{вых}} = I_{EK} - I_{EC} + I_{KF} = I_{EF} - I_{EC} =$$

$$= \rho_0 r_{\text{кр}} a_{\text{кр}}^2 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left[\sqrt{\frac{k - \cos 2\varphi_F/m}{k-1}} (\cos \varphi_F/m)^{m^2} \cos \Theta_F \bar{r}_{EF} + \right.$$

$$+ \frac{(\cos \varphi_F/m)^{m^2+1}}{k} \cdot \bar{r}_{EF} - \sqrt{\frac{k - \cos 2\varphi_C/m}{k-1}} \cdot (\cos \varphi_C/m)^{m^2} \bar{r}_{EC} -$$

$$\left. - \frac{\cos (\varphi_C/m)^{m^2+1}}{k} \bar{r}_{EC} \right]. \qquad (14)$$

Текущий радиус в равенстве (14) определяется формулой:

$$\bar{r}_{EF} = \left[\frac{\gamma(\varphi_A) + R_E}{j(\varphi_B)}\right] \left(\frac{\cos \varphi_B/m}{\cos \varphi_F/m}\right)^{m^2} = \frac{A}{(\cos \varphi_F/m)}\Bigg)^{m^2}, \qquad (15)$$

где $A = \left[\frac{\gamma(\varphi_A) + R_E}{j(\varphi_B)}\right] (\cos \varphi_B/m)^{m^2}$.

Угол Θ_F определяется из рассмотрения картины течения в укороченном сопле, представленной в плоскости годографа скорости (рис. 1 б), в которой контрольному контуру FKC соответствует дуга эпициклоиды KC, и равен

$$\Theta_F = 2\Theta_B - \Theta_{F1},$$

$$\Theta_{F1} = \left[\left(\varphi_F + \operatorname{arcc tg} m \operatorname{tg} \varphi_F/m\right) - \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (16)$$

Таким образом, выходной импульс для укороченного сопла, отнесенный к произведению $2\rho_0 r_{\text{кр}} \cdot a_{\text{кр}}^2 \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ в функции угла расширения φ с учетом выражений (15) и (16), имеет вид:

$$\bar{I}_{\text{вых}} = \left(\sqrt{\frac{k - \cos 2\varphi_F/m}{k-1}} \cdot \cos \Theta_F + \frac{\cos \varphi_F/m}{k}\right) A -$$

$$-\left(\sqrt{\frac{k - \cos 2\varphi_C/m}{k-1}} + \frac{\cos \varphi_C/m}{k}\right) \cdot \frac{R_E}{j(\varphi_C)}.$$

ВЫВОДЫ

На рис. 2 представлены профили сверхзвуковых частей идеальных плоских сопл Лаваля с угловой точкой в критическом сечении и равномерным полем потока на выходе.

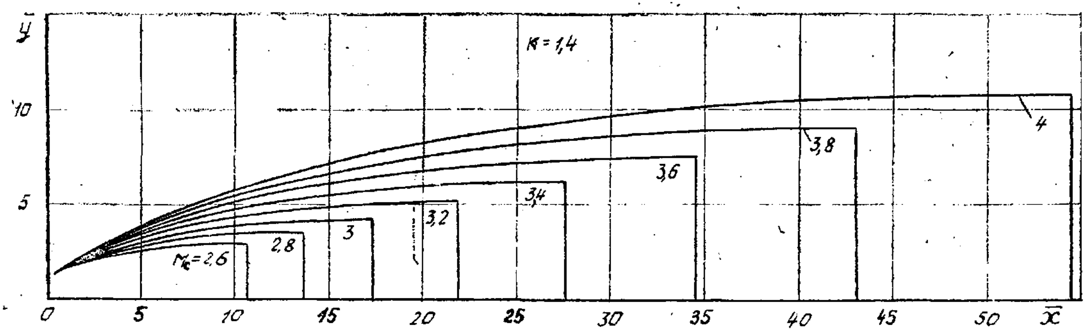

Рис. 2. Профили сверхзвуковой части

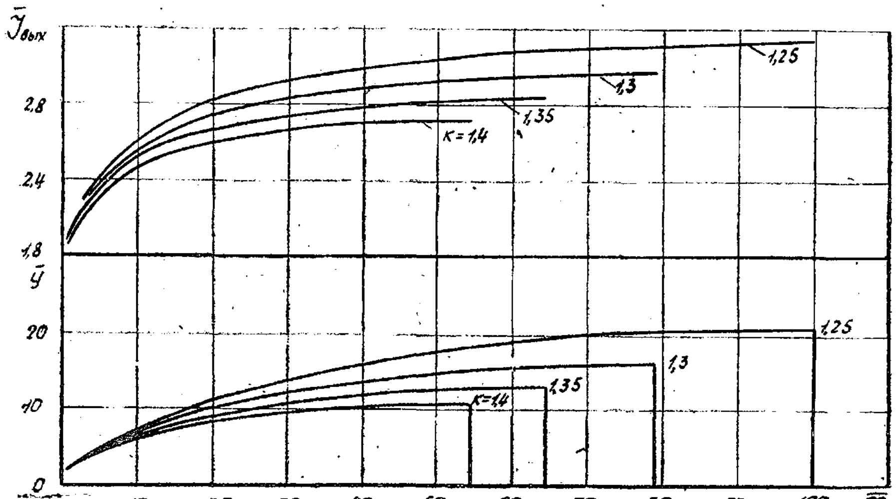

Рис. 3. Зависимости поперечного размера $\bar{У}$ и относительного выходного импульса $\bar{I}_{вых}$ при

Расчеты выполнены для $k = 1{,}4$ и чисел M от 2,6 до 4.

При $M_c = \mathrm{const}$ на длину сверхзвуковой части сопла и поперечный размер сильное влияние оказывает величина показателя адиабаты течения (рис. 3). Причем с уменьшением величины κ от 1,4 до 1,25 при $M = 4$ относительные координаты среза сопла $\bar{x}$ и $\bar{y}$ увеличиваются почти в 2 раза.

Здесь же, на рис. 3, иллюстрируется изменение относительного импульса сопла от его длины. Видно, что укорочение длины сопла ~ на 10—15% не оказывает существенного влияния на характеристики сопла.

Представленные расчеты проведены на ЭВМ М 220М.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парментьер, Гринберг.* Сверхзвуковые аэродинамические шлюзы для мощных лазеров. «Ракетная техника и космонавтика». AIAA том 11, № 7, 1973.
2. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., ИИЛ, 1961.
3. *Христианович С. А.* Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. ПММ, М., 1974, т. XI, 2.
4. *Цыбизов Ю. И.* Исследование плоских течений сжимаемой жидкости с использованием представлений годографа скорости. Автореферат кандидатской диссертации. Казань, 1971.