

Ю. М. АРЫШЕНСКИЙ, И. И. КАЛУЖСКИЙ, В. В. УВАРОВ

## К ВОПРОСУ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД

В авиационной промышленности широко применяются материалы, обладающие явно выраженными анизотропными свойствами. В качестве примеров можно указать на титановые, магниевые и алюминиевые сплавы. Применяемые для изготовления деталей полуфабрикаты (листы, ленты, профили и т. д.) являются, как правило, либо ортотропными, либо трансверсально изотропными.

Тело, у которого в каждой точке имеется три взаимноперпендикулярные плоскости симметрии механических свойств, называется ортогонально анизотропным или ортотропным. В том случае, когда имеется плоскость, в которой все свойства одинаковы, наблюдается трансверсальная изотропия.

Для расчетов процессов обработки металлов давлением необходимо учитывать параметры анизотропии. Настоящая статья ставит своей целью довести некоторые вопросы теории пластичности анизотропных тел до практического использования в инженерных расчетах.

Рассмотрим условие пластичности анизотропного тела предложенное Мизесом [1], для случая ортотропного тела в главных осях:

$$F = \frac{1}{2} [K_{12}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + K_{31}(\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (1)$$

где  $K_{ij}$  — коэффициенты (константы) анизотропии.

Для нахождения соотношения между деформациями и напряжениями воспользуемся условием минимума удельной работы де-

формации. Удельная работа пластической деформации, соответствующая приращению деформации:

$$dA = \sum \sigma_m d\varepsilon_m \quad (m = 1, 2, 3),$$

где  $\sigma_m$  и  $\varepsilon_m$  — главные напряжения и деформации. Дополнительным условием является условие пластичности (1), т. е.

$$F(\sigma_m) = \text{const.}$$

Используя метод Лагранжа (метод нахождения относительно го экстремума функции), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_m} (\sum \sigma_m d\varepsilon_m - F d\lambda) = 0,$$

откуда следует

$$d\varepsilon_m = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_m}, \quad (2)$$

где  $d\lambda$  — коэффициент пропорциональности.

Продифференцировав выражение (1), и подставив полученные выражения частных производных в (2), получим:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= d\lambda [K_{12}(\sigma_1 - \sigma_2) + K_{31}(\sigma_1 - \sigma_3)], \\ d\varepsilon_2 &= d\lambda [K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3) + K_{12}(\sigma_2 - \sigma_1)], \\ d\varepsilon_3 &= d\lambda [K_{31}(\sigma_3 - \sigma_1) + K_{23}(\sigma_3 - \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь выражения (3) могут быть проинтегрированы и преобразованы к виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda [K_{12}(\sigma_1 - \sigma_2) + K_{31}(\sigma_1 - \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \lambda [K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3) + K_{12}(\sigma_2 - \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \lambda [K_{31}(\sigma_3 - \sigma_1) + K_{23}(\sigma_3 - \sigma_2)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности.

Легко заметить, что  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ .

Для того, чтобы выразить коэффициенты анизотропии через пластические константы материала (коэффициенты поперечной деформации), рассмотрим случаи линейного напряженного состояния в направлении осей координат.

Обозначим коэффициенты поперечной деформации через  $\mu_{ek}$ , где первый индекс показывает направление поперечного сжатия, второй индекс — направление действия силы. Положим  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , тогда уравнения (4) примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda (K_{12} + K_{31}) \sigma_1; \\ \varepsilon_2 &= -\lambda K_{12} \sigma_1; \\ \varepsilon_3 &= -\lambda K_{31} \sigma_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{31}} \\ \text{и} \\ \mu_{31} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{K_{31}}{K_{12} + K_{31}}. \end{aligned} \quad (5-a)$$

Аналогично, принимая  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$  и  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , получаем:

$$\mu_{12} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{23}}, \quad (5-б)$$

$$\mu_{32} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{K_{23}}{K_{12} + K_{23}},$$

$$\mu_{13} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{K_{31}}{K_{23} + K_{31}}, \quad (5-в)$$

$$\mu_{23} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{K_{23}}{K_{23} + K_{31}}.$$

Из выражений (5) следует: что

$$\mu_{21} + \mu_{31} = 1, \quad \mu_{12} + \mu_{32} = 1, \quad \mu_{13} + \mu_{23} = 1, \quad (6)$$

$$\frac{K_{12}}{K_{31}} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{31}}, \quad \frac{K_{12}}{K_{23}} = \frac{\mu_{12}}{\mu_{32}}, \quad \frac{K_{31}}{K_{23}} = \frac{\mu_{13}}{\mu_{23}}. \quad (7)$$

Из уравнений (7) имеем дополнительное соотношение между коэффициентами поперечной деформации:

$$\frac{\mu_{21} \mu_{32}}{\mu_{12}} = \frac{\mu_{31} \mu_{23}}{\mu_{13}}$$

или

$$\frac{\mu_{21} (1 - \mu_{12})}{\mu_{12}} = \frac{(1 - \mu_{21})(1 - \mu_{13})}{\mu_{13}}. \quad (6-а)$$

Следовательно, для ортотропного тела может быть только два независимых коэффициента поперечной деформации. Используя соотношения (5) уравнения (4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda (K_{12} + K_{31}) (\sigma_1 - \mu_{21} \sigma_2 - \mu_{31} \sigma_3); \\ \varepsilon_2 &= \lambda (K_{23} + K_{12}) (\sigma_2 - \mu_{32} \sigma_3 - \mu_{12} \sigma_1); \\ \varepsilon_3 &= \lambda (K_{31} + K_{23}) (\sigma_3 - \mu_{23} \sigma_2 - \mu_{13} \sigma_1). \end{aligned} \quad (4-а)$$

Выберем коэффициенты анизотропии так, чтобы квадратичная функция напряжений (1)

$$K_{12}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + K_{31}(\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

при растяжении в направлении «1» ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) равнялась  $\sigma_1^2$ .

Тогда  $K_{12} + K_{31} = 1$ . (8)

Из выражений (5), (6) и (7), используя (8), находим:

$$\begin{aligned} K_{12} &= \mu_{21}, \quad K_{31} = \mu_{31} = 1 - \eta_{21}, \\ K_{23} &= \frac{\mu_{21} \mu_{32}}{\mu_{12}} = \frac{\mu_{31} \mu_{23}}{\mu_{13}} = \frac{\mu_{21} (1 - \mu_{12})}{\mu_{12}} = \frac{(1 - \mu_{21})(1 - \mu_{13})}{\mu_{13}}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$K_{23} + K_{12} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}, \quad K_{31} + K_{23} = \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}.$$

С учетом (8) и (9) уравнения (4-а) принимают вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \lambda(\sigma_1 - \mu_{21}\sigma_2 - \mu_{31}\sigma_3); \\ \varepsilon_2 &= \lambda \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} (\sigma_2 - \mu_{32}\sigma_3 - \mu_{12}\sigma_1); \\ \varepsilon_3 &= \lambda \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} (\sigma_3 - \mu_{13}\sigma_1 - \mu_{23}\sigma_2).\end{aligned}\quad (10)$$

Введем интенсивности напряжений в разных направлениях  $\sigma_{i1}$ ,  $\sigma_{i2}$ ,  $\sigma_{i3}$ , которые с точностью до постоянного множителя должны равняться квадратичной форме напряжений (1) и удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}\sigma_{i1} &= \sigma_1 \quad \text{при} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \\ \sigma_{i2} &= \sigma_2 \quad \text{при} \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \\ \sigma_{i3} &= \sigma_3 \quad \text{при} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.\end{aligned}$$

Из равенства (1), выразив коэффициенты анизотропии через коэффициенты поперечной деформации, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_{i1} &= \sqrt{\mu_{21}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ \sigma_{i2} &= \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \cdot \sigma_{i1}, \quad \sigma_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}} \cdot \sigma_{i1}.\end{aligned}\quad (11)$$

Отношения  $\frac{\mu_{32}}{\mu_{12}}$ ,  $\frac{\mu_{31}}{\mu_{21}}$ ,  $\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}$  можно выразить через два независимых коэффициента  $\mu_{12}$  и  $\mu_{21}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} &= \frac{1}{\mu_{12}} - 1 = A, \quad \frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} = \frac{1}{\mu_{21}} - 1 = B \\ \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}} &= \frac{\mu_{12}}{\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})}.\end{aligned}\quad (11a)$$

Теперь найдем коэффициент пропорциональности  $\lambda$ . Для этого перепишем систему (4) в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \lambda [\mu_{21}(\sigma_1 - \sigma_2) - \mu_{31}(\sigma_3 - \sigma_1)]; \\ \varepsilon_2 &= \lambda [K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3) - \mu_{21}(\sigma_1 - \sigma_2)]; \\ \varepsilon_3 &= \lambda [\mu_{31}(\sigma_3 - \sigma_1) - K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)].\end{aligned}$$

Из данной системы и дополнительного условия

$$(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_3 - \sigma_1) = 0$$

находим:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{K_{23}\varepsilon_1 - \mu_{31}\varepsilon_2}{\lambda} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}(1 - \mu_{21}\mu_{12})}; \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{\mu_{31}\varepsilon_2 - \mu_{21}\varepsilon_3}{\lambda} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}(1 - \mu_{21}\mu_{12})}; \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{\mu_{21}\varepsilon_3 - K_{23}\varepsilon_1}{\lambda} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}(1 - \mu_{21}\mu_{12})}.\end{aligned}$$

Подставляя полученные разности в выражение  $\sigma_{i1}$  (11), получим:

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}}, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_{i1}$  — интенсивность деформаций в направлении «1» имеет вид:

$$\varepsilon_{i1} = \frac{\sqrt{\mu_{21}\mu_{12}}}{(1 - \mu_{21}\mu_{12})} \cdot \sqrt{(A\varepsilon_1 - B\varepsilon_2)^2 + A(B\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + B(\varepsilon_3 - A\varepsilon_1)^2}. \quad (13)$$

С учетом условия постоянства объема выражение (13) примет вид:

$$\varepsilon_{i1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \cdot \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\mu_{21}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}\varepsilon_2^2}. \quad (13a)$$

В случае изотропности материала выражения (11) и (13) переходят в обычные формулы интенсивности напряжений и деформаций.

Аналогично получаем:

$$\varepsilon_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \varepsilon_{i1}, \quad \varepsilon_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \varepsilon_{i1}. \quad (13б)$$

Заметим, что при условии  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_1$ , и т. д. Теперь систему (10) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} (\sigma_1 - \mu_{21}\sigma_2 - \mu_{31}\sigma_3); \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} (\sigma_2 - \mu_{32}\sigma_3 - \mu_{12}\sigma_1); \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} (\sigma_3 - \mu_{13}\sigma_1 - \mu_{23}\sigma_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Положим

$$E'_1 = \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}}, \quad E'_2 = \frac{\sigma_{i2}}{\varepsilon_{i2}}, \quad E'_3 = \frac{\sigma_{i3}}{\varepsilon_{i3}}, \quad (15)$$

где  $E'_k$  — модуль пластичности в направлении «К».

Из (11) и (13-а), используя (6-а), получаем:

$$E'_1 \mu_{12} = E'_2 \mu_{21}, \quad E'_1 \mu_{13} = E'_3 \mu_{31}, \quad E'_2 \mu_{23} = E'_3 \mu_{32}, \quad (16)$$

Соотношения (16) аналогичны соотношениям из теории упругости анизотропных сред [2].

С помощью соотношений (16) и (6-а) уравнения (14) могут быть представлены в виде, аналогичном обобщенному закону Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E'_1} \sigma_1 - \frac{\mu_{12}}{E'_2} \sigma_2 - \frac{\mu_{13}}{E'_3} \sigma_3; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu_{21}}{E'_1} \sigma_1 + \frac{1}{E'_2} \sigma_2 - \frac{\mu_{23}}{E'_3} \sigma_3; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu_{31}}{E'_1} \sigma_1 - \frac{\mu_{32}}{E'_2} \sigma_2 + \frac{1}{E'_3} \sigma_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Для практического пользования выведенными уравнениями необходимо знать значение коэффициентов поперечной деформации  $\mu_{\text{пер}}$ . Как было отмечено ранее, существует только два независимых коэффициента поперечной деформации. Для их определения необходимо провести обычные механические испытания на растяжение в двух взаимноперпендикулярных направлениях.

Кроме того, необходимо получить зависимость между  $\sigma_{ik}$  и  $\epsilon_{ik}$  в различных направлениях.

Практически достаточно построить диаграмму истинных напряжений в одном из направлений и зная коэффициенты поперечной деформации, можно получить функциональные связи в других взаимноперпендикулярных с первым направлениях.

Для проверки основных положений рассматриваемой теории авторы провели экспериментальные исследования с титановыми

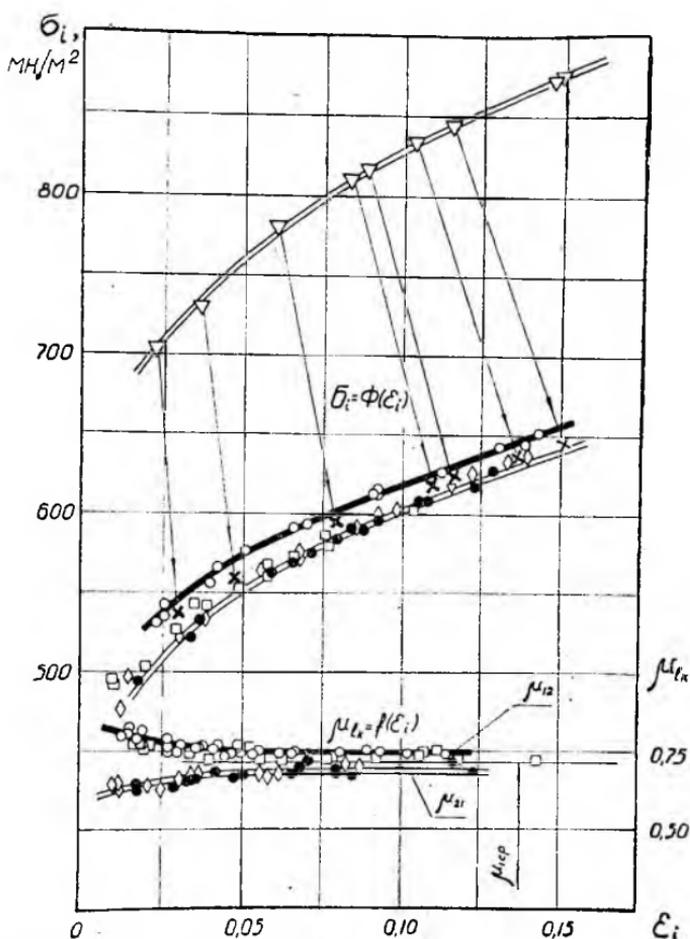


Рис. 1. Результаты испытаний листового титанового сплава BT1-2

- — одноосное растяжение продольных образцов;
- — одноосное растяжение образцов под углом  $\alpha = 22,5^\circ$ ;
- ◇ — одноосное растяжение образцов под углом  $\alpha = 45^\circ$ ;
- — одноосное растяжение образцов под углом  $\alpha = 67,5^\circ$ ;
- — одноосное растяжение поперечных образцов;
- △ — двухосное растяжение без учета анизотропии;
- × — двухосное растяжение с учетом анизотропии.

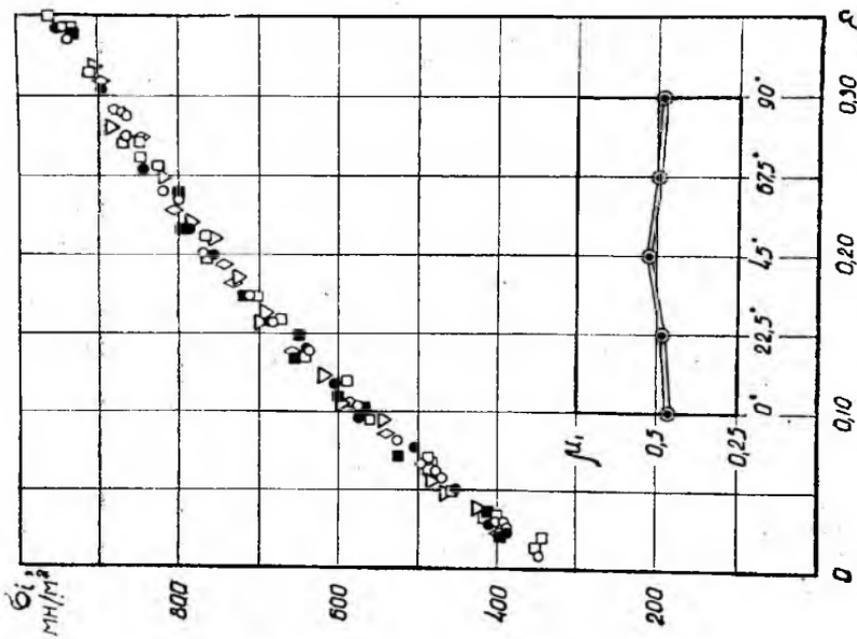


Рис. 3. Результаты испытаний листовой нержавеющей стали IX18H10T

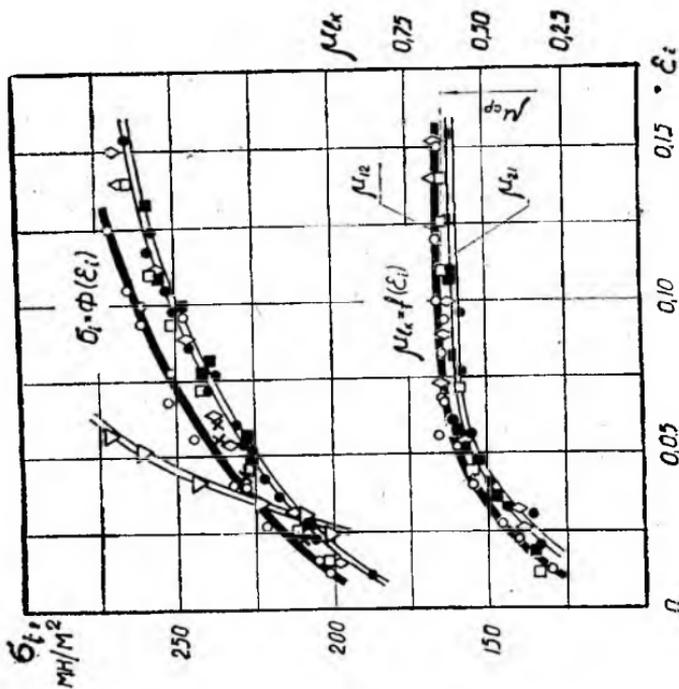


Рис. 2. Результаты испытаний листовой магнетового сплава МА8

сплавами ВТ1-2, ОТ4, ОТЗ, магниевым сплавом МА8 и нержавеющей сталью 1Х18Н10Т.

Коэффициенты поперечной деформации определялись при линейном растяжении для различных направлений в плоскости листа (вдоль проката  $\alpha_1=0^\circ$ , поперек  $\alpha_5=90^\circ$ ,  $\alpha_2=22,5^\circ$ ,  $\alpha_3=45^\circ$ ,  $\alpha_4=67,5^\circ$ ). Деформации  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_k$  находились по изменению размеров координатной сетки, нанесенной на поверхность образца. При малых деформациях до 3% для определения  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_k$  использовались тензометры.

На графиках (рис. 1, 2, 3) показаны зависимости коэффициентов  $\mu_{ek}$  от величины деформации и кривые упрочнения в различных направлениях. Из графиков видно, что соотношения (11), (13а) выполняются с достаточной степенью точности.

Следует также отметить, что значения коэффициентов анизотропии для материалов ВТ1, МА8 значительно отличаются от  $\mu=0,5$ , а у стали 1Х18Н10Т их величины близки к 0,5, т. е. имеем случай изотропного материала. С увеличением степени деформации коэффициенты в различных направлениях сближаются и остаются постоянными. Это дает основание считать исследуемые материалы, начиная с 5—6% деформации, трансверсально изотропными.

При плоском напряженном состоянии проверялась гипотеза независимости интенсивности напряжений от вида нагружения. Плоско-напряженное состояние создавалось на тонкостенных трубах из ВТЗ путем растяжения и внутреннего давления, а на листах из ВТ1-2, МА8 и 1Х18Н10Т гидростатическим выпучиванием.

Прутковый материал ВТЗ в отожженном состоянии разрезался на заготовки вдоль и поперек прокатки, а затем из них изготовлялись тонкостенные трубы и образцы на одноосное растяжение.

При нагружении трубы растяжением и внутренним давлением отношение  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  было практически постоянным (простое нагружение). Главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  подсчитывались по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{\sigma_2}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{pd}{2\delta}, \quad (18)$$

а деформации  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  вычислялись по изменению размеров.

В результате испытаний получены зависимости интенсивностей напряжений от деформаций в различных направлениях (рис. 4).

Из графика видно, что кривые  $\sigma_1 = \Phi(\epsilon_1)$  переходят друг в друга независимо от вида нагружения при учете коэффициентов анизотропии  $\mu_{ek}$  т. е. с достаточной степенью точности выполняется проверяемая гипотеза.

Значительный интерес представляет экспериментальная проверка теории на листовых анизотропных материалах. При гидростатическом выпучивании листового материала напряженное состояние в полюсе лунки характеризуется отношением  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$ .

т. е. сильно отличается от линейного растяжения. Напряжения  $\sigma_1$  и

$\sigma_2$  в полюсе лунки, возникающие под действием гидростатического давления  $q$ , определялись из соотношения

$$\frac{\sigma_1}{R_n} + \frac{\sigma_2}{R_n} = \frac{q}{t_n} \quad (19)$$

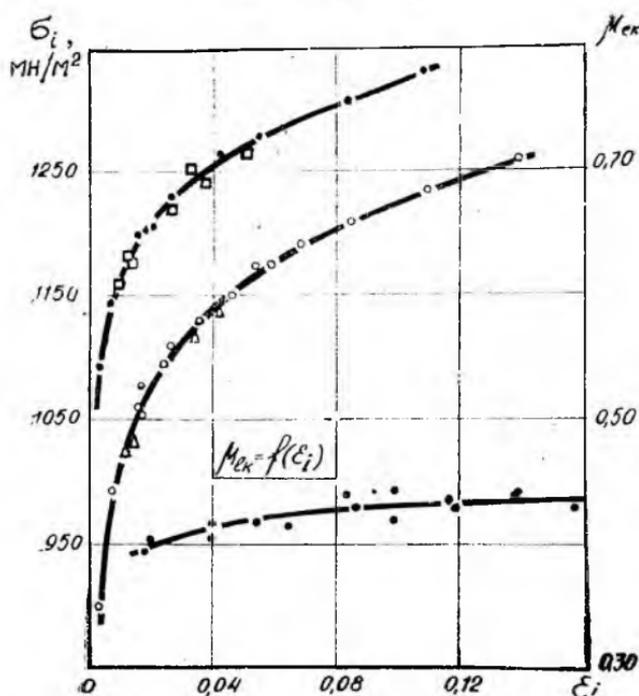


Рис. 4. Зависимости интенсивностей напряжений, коэффициента  $\mu_{ek}$  от деформации при испытании тонкостенных труб и образцов из сплава ВТЗ

- — одноосное растяжение продольных образцов;
- ▽ — двухосное растяжение продольных труб;
- — одноосное растяжение поперечных образцов;
- — двухосное растяжение продольных труб, с учетом анизотропии

Деформации подсчитывались по утонению материала в этом же месте. По величинам  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  находились значения  $\sigma_1$  и  $\epsilon_1$  с использованием формул обычного изотропного материала  $\sigma_1 = \sigma_1$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_3$  и с учетом анизотропии:

$$\sigma_{i1} = \sqrt{2(1 - \mu_{cp})} \cdot \sigma_1, \quad \epsilon_{i1} = \frac{\epsilon_3}{\sqrt{2(1 - \mu_{cp})}} \quad (20)$$

Как видно из графиков (рис 1, 2, 3) у материалов ВТ1-2 и МА8 зависимости  $\sigma = \Phi(\epsilon_1)$  для сложного напряженного состояния без учета анизотропии значительно отличаются от результатов одноосного растяжения. Для нержавеющей стали кривые практически совпадают. В случае учета анизотропии кривые одноосного и двухосного растяжения сливаются, что также доказывает справедливость гипотезы независимости  $\sigma_1 = \Phi(\epsilon_1)$  от вида нагружения.

Проведенные эксперименты показали правильность основных уравнений теории пластичности анизотропных сред. Разработанная теория может быть использована в инженерных расчетах процессов формоизменения анизотропных материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Качанов. Механика пластических сред. ОГИЗ, 1948.
  2. С. А. Амбарцумян. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
  3. А. М. Жуков. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. Инженерный сборник, том 20, 1954.
  4. Е. И. Исаченков. Штамповка резиной и жидкостью. Машиностроение, 1967.
-