КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ, ВЫПУСК XX, ЧАСТЬ II, 1965 г.
Вопросы технологии производства летательных аппаратов

Ю. М. АРЫШЕНСКИЙ, И. Н. КАЛУЖСКИЙ, В. Н. ФАРМАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНОЙ СЕТКИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССА ОБТЯЖКИ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ, ОБЛАДАЮЩИХ АНИЗОТРОПИЕЙ

Исследуя характер распределения деформаций и напряжений при штамповке, широко используют метод координатных сеток. Особенно эффективен этот метод при условии, когда одна из сторон детали не находится в контакте с инструментом. Это условие выполняется при изготовлении оболочек методом обтяжки, причем характер протекания пластической деформации удовлетворяет условиям монотонности.

Для определения величин деформации и возникающих напряжений на одной из сторон листовых образцов (120×700) была нанесена сетка, состоящая из соприкасающихся кругов диаметром $d=10$ *мм*. Для нанесения сетки был применен фотоконтактный метод. Преимущество его по сравнению с другими способами (накатным, чертилкой по разметке и т. д.) заключается в следующем: размеры сетки постоянны на различных заготовках; после термообработки сетка хорошо заметна на поверхности образца, что особенно важно при исследовании обтяжки с промежуточным отжигом; сетка хорошо заметна даже в том случае, если она находилась в контакте с рабочим инструментом, в частности, с пуансоном.

На листе винипроза (прозрачный пластик) специальной тушью был нанесен эталон сетки. Для повышения точности расчета сетка дополнительно замерялась на инструментальном микроскопе с точностью до 1 *мк*.

На протравленные образцы с одной стороны наносился слой светочувствительной эмульсии. После подсушки на образец накладывался эталон и производилось фотографирование. При этом на темном общем фоне получались хорошо заметные светлые линии сетки.

При проведении эксперимента кружки, нанесенные на образцы, вытягивались и превращались в эллипсы. Как известно [1], три главных компонента результативной деформации можно определить по формулам:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{2a}{d}; \ \varepsilon_2 = \ln \frac{2b}{d} \ \text{и} \ \varepsilon_3 = \ln \frac{d^2}{4ab} \tag{1}$$

или

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{2}$$

где $2a$ и $2b$ — оси полученных эллипсов;

d — диаметр нанесенных кружков.

Ввиду того, что деформация на титановых образцах не превышает 10%, можно пользоваться упрощенными формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{2a}{d} - 1; \ \varepsilon_2 = \frac{2b}{d} - 1; \ \varepsilon_3 = \frac{d^2}{4ab} - 1. \tag{3}$$

При этом ошибка не превышает 5%.

Дальнейшие расчеты для определения интенсивности деформаций ε_i и напряжений σ_1 и σ_2 должны отличаться от расчетов, приведенных в работе [1], т. к. титановые сплавы ВТ1-2 и ОТ4-1 обладают явно выраженной трансверсальной изотропией, т. е. материал изотропен в плоскости листа, а анизотропность имеет место в направлении его толщины.

Была сделана попытка получить уравнение связи между деформациями и напряжениями в случае трансверсальной изотропии, используя обобщенный закон Гука, который в данном случае имеет вид [2].

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \mu_{12}\sigma_2) - \frac{\mu_{13}}{E_3}\sigma_3;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_1}(\sigma_2 - \mu_{12}\sigma_1) - \frac{\mu_{13}}{E_3}\sigma_3;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} - \frac{\mu_{31}}{E_1}(\sigma_1 + \sigma_2), \tag{4}$$

где E_1 — модуль упругости для направлений в плоскости изотропии (направления *1* и *2*);

E_3 — модуль упругости для направлений, перпендикулярных плоскости изотропии (направление *3*);

μ_{ik} — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении в направлении осей координат (первый индекс показывает направление поперечной деформации, второй — направление действия силы).

При этом учтено, что

$$\mu_{21} = \mu_{12};\ \mu_{23} = \mu_{13};\ \mu_{31} = \mu_{32}.$$

При рассмотрении процесса обтяжки может быть принята схема плоского напряженного состояния (σ_3 мало по сравнению с σ_1 и σ_2, а на внешней поверхности листа оно вообще равно нулю).

Тогда закон Гука запишется в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \mu_{12}\sigma_2);\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_1}(\sigma_2 - \mu_{12}\sigma_1);\\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu_{31}}{E_1}(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Решая систему (5) относительно напряжений и заменяя E_1 на приведенный модуль E', а коэффициент Пуассона μ_{12} на коэффициент поперечной деформации μ', получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E'\frac{\varepsilon_1 + \mu'\varepsilon_2}{1-(\mu')^2};\\ \sigma_2 &= E'\frac{\varepsilon_2 + \mu'\varepsilon_1}{1-(\mu')^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты поперечной деформации для сплавов ОТ4-1 и ВТ1-2 были найдены экспериментальным путем и соответственно равны 0,62 ÷ 0,65 и 0,6 ÷ 0,62.

В 1928 г. Мизес [3] предложил теорию пластичности для анизотропного тела, в которой в общем виде привел условие пластичности.

В главных осях с учетом трансверсальной изотропии его уравнение приобретает вид:

$$F = \frac{1}{2}\left[K_{12}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + K_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + K_{31}(\sigma_3 - \sigma_1)^2\right], \tag{7}$$

где K_{ij} — коэффициенты анизотропии.

Учитывая, что $K_{23} = K_{31}$, и обозначая $\frac{K_{23}}{K_{12}} = \frac{K_{31}}{K_{12}}$ через K, получим условие пластичности в виде:

$$F = \frac{K_{12}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + K(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + K(\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (8)$$

Для нахождения коэффициента K необходимо произвести опыты на линейное растяжение в направлении *1* или *2* (они равносильны) и растяжение (сжатие) в направлении *3*.

При линейном растяжении в направлении *1* уравнение (8) приобретает вид:

$$F_1 = \frac{K_{12}}{2} (\sigma_1^2 + K\sigma_1^2) = \frac{K_{12}}{2} \sigma_1^2 (1 + K), \quad (8а)$$

а при деформации в направлении 3:

$$F_3 = \frac{K_{12}}{2} 2K\sigma_3^2. \quad (8б)$$

Для выполнения условия пластичности (8) необходимо, чтобы текучесть наступала при одном и том же значении F при деформировании в любых направлениях.
Следовательно

$$\frac{K_{12}}{2} \sigma_{1s}^2 (1 + K) = \frac{K_{12}}{2} 2K\sigma_{3S}^2$$

или

$$K = \frac{\sigma_{1S}^2}{2\sigma_{3S}^2 - \sigma_{1S}^2}. \quad (9)$$

Здесь σ_{1S} и σ_{3S} — пределы текучести по направлениям *1* и *3*.

Как указывалось ранее, при обтяжке была принята схема плоского напряженного состояния. В этом случае уравнение (8) принимает вид:

$$F = \frac{K_{12}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + K\sigma_2^2 + K\sigma_1^2. \quad (8в)$$

Считая, что $F = \sigma_i^2$, получим

$$\sigma_i^2 = \frac{K_{12}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + K\sigma_2^2 + K\sigma_1^2], \quad (10)$$

полагая $\sigma_2 = 0$ (при этом $\sigma_i = \sigma_1$),

находим, что $K_{12} = \frac{2}{1 + K}$, или

$$K_{12} = \frac{2\sigma_{3S}^2 - \sigma_{1S}^2}{\sigma_{3S}^2}. \tag{11}$$

Подставляя значения коэффициентов κ и κ_{12} в уравнение (10) получим:

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \frac{2\sigma_{3S}^2 - \sigma_{1S}^2}{\sigma_{3S}^2}\,\sigma_1\sigma_2}. \tag{12}$$

Легко видеть, что уравнение (12) в случае изотропного тела, когда $\sigma_{3S} = \sigma_{1S}$ превращается в обычное уравнение интенсивности напряжений для плоского напряженного состояния. Если заменить в уравнении (12) σ_1 и σ_2 их значениями из формулы (6) и принять, что $E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$, то можно получить:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{1-(\mu')^2}\sqrt{\begin{array}{l}(\varepsilon_1 + \mu'\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \mu'\varepsilon_1)^2 - \\ -\dfrac{2\sigma_{3S}^2 - \sigma_{1S}^2}{\sigma_{3S}^2}(\varepsilon_1 + \mu'\varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \mu'\varepsilon_1).\end{array}} \tag{13}$$

Теперь окончательно имеем

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1 + \mu'\varepsilon_2}{1-(\mu')^2}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}; \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2 + \mu'\varepsilon_1}{1-(\mu')^2}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \tag{14}$$

Экспериментальное нахождение коэффициента κ_{12} для листовых материалов вызывает затруднения из-за необходимости определения предела текучести по их толщине σ_{3s}. Поэтому выразим коэффициент κ_{12} через более доступные, для экспериментального определения, пластические характеристики материала. Для этого воспользуемся уравнениями, выведенными П. П. Петрищевым [4] для случая трансверсальной изотропии:

$$\bar\varepsilon_1 = \frac{1}{\lambda}\,[A\,(\bar\sigma_1 - \bar\sigma_2) - B\bar\sigma_3];$$

$$\bar\varepsilon_2 = \frac{1}{\lambda}\,[A\,(\bar\sigma_2 - \bar\sigma_1) - B\bar\sigma_3];$$

$$\bar\varepsilon_3 = \frac{2}{\lambda}\,B\bar\sigma_3; \tag{15}$$

где $\bar\varepsilon_k$ и $\bar\sigma_k$ — составляющие девиаторов деформаций и напряжений;

A и B — коэффициенты анизотропии, a

$$\lambda = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}.$$

При этом

$$\sigma_i^2 = A(\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2)^2 + 3B\overline{\sigma}_3^2, \tag{16}$$

$$\varepsilon_i^2 = \frac{1}{4A}(\overline{\varepsilon}_1 - \overline{\varepsilon}_2)^2 + \frac{3}{4B}\overline{\varepsilon}_3^2. \tag{17}$$

Уравнения (15), (16) и (17) в составляющих напряжений и деформаций при условии несжимаемости ($\widetilde{\varepsilon}_\kappa = \varepsilon_\kappa$) и в случае плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$) имеют вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\lambda}\left[\left(A + \frac{1}{3}B\right)\sigma_1 - \left(A - \frac{1}{3}B\right)\sigma_2\right];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\lambda}\left[\left(A + \frac{1}{3}B\right)\sigma_2 - \left(A - \frac{1}{3}B\right)\sigma_1\right];$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{2B}{3\lambda}(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{15a}$$

$$\sigma_i^2 = A(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{B}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)^2. \tag{16a}$$

$$\varepsilon_i^2 = \frac{1}{4A}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \frac{3}{4B}\varepsilon_3^2. \tag{17a}$$

В случае линейного растяжения в плоскости изотропии (в направлении *1*) из уравнений (15а) вытекает:

$$\varepsilon_3 = -\frac{2B}{B + 3A}\varepsilon_1; \quad \varepsilon_2 = -\frac{3A - B}{B + 3A}\varepsilon_1.$$

Но, как известно, $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\mu'$, а потому имеем

$$\mu' = \frac{3A - B}{B + 3A}. \tag{18}$$

Интенсивности напряжений σ_i и деформаций ε_i в этом случае принимают вид:

$$\sigma_i = \sigma_1\sqrt{A + \frac{1}{3}B} \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = \varepsilon_1\frac{1}{\sqrt{A + \frac{1}{3}B}}.$$

Выбирая коэффициенты A и B так, чтобы $\sigma_i = \sigma_1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_1$ получим:

$$A + \frac{1}{3}B = 1. \tag{19}$$

Решим совместно уравнения (18) и (19) относительно A и B.

$$A = \frac{1}{2}(1 + \mu'); \; B = \frac{3}{2}(1 - \mu'). \qquad (20)$$

После подстановки вместо коэффициентов A и B их значений (20) уравнения (16а) и (17а) примут вид:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu'\sigma_1\sigma_2}. \qquad (21)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mu')^2}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu'\varepsilon_1\varepsilon_2}. \qquad (22)$$

Сравнивая выражения (12) и (13) с выражениями (21) и (22) находим, что

$$K_{12} = 2\mu'. \qquad (23)$$

Теперь можно из испытаний на простое растяжение легко получить K_{12}.

Для экспериментальной проверки основных уравнений проводилось испытание на растяжение образцов, у которых рабочая длина равнялась их ширине. При этом возникала затрудненная деформация в направлении ширины образца, т. е. создавалось плоское напряженное состояние.

Напряжение σ_1 при испытании может быть вычислено обычным путем $\sigma_1 = \frac{P}{F}$, где P усилие растяжения, а F — площадь поперечного сечения. С другой стороны σ_1 может быть найдено по формуле (13). Приведем в качестве примера испытание образцов из сплава ВТ1-2 толщиной 1,2 *мм*.

Для нахождения σ_i была использована степенная аппроксимация диаграммы истинных напряжений $\sigma_i = K\varepsilon_i^n$. При этом формула (13) примет вид:

$$\sigma_1 = K\varepsilon_i^{n-1} \frac{\varepsilon_1 + \mu'\varepsilon_2}{1 - (\mu')^2} \qquad (13а)$$

для указанного материала $K = 79{,}8$ *кг/мм²*, $n = 0{,}1045$ и $\mu' = 0{,}6$. При испытании получены следующие результаты (таблица 1).

Таблица 1

№№ п/п.	ε_1	ε_2	σ_1 расчетное, *кг/мм²*	σ_1 практич. *кг/мм²*
1	0,008	—0,003	51,8	49,4
2	0,028	—0,015	57,9	61
3	0,036	—0,018	60,6	64,1
4	0,057	—0,03	64,3	66,8

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Смирнов-Аляев, Сопротивление материалов пластическому деформированию. Машгиз, 1961.
2. С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
3. Л. М. Качанов, Механика пластических сред. ОГИЗ, 1948.
4. П. П. Петрищев, Вестник МГУ, № 8, 1952.