

*М. Ф. КРИЧЕВЕР*

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ К РАСЧЕТУ ФУНДАМЕНТА КРИВОШИПНОГО ГОРЯЧЕСТАМПОВОЧНОГО ПРЕССА

В настоящей работе решается задача о колебаниях фундаментов машин, в состав которых входят один или несколько кривошипно-шатунных механизмов. Многие типы машин с кривошипно-шатунными механизмами относятся к классу неуравновешенных и поэтому опасны с точки зрения вибраций. Основными нагрузками, которые вызывают вынужденные колебания фундамента под поршневыми машинами, являются неуравновешенность сил инерции движущихся частей кривошипно-шатунных механизмов.

Благодаря наличию в этих машинах движущихся звеньев (шатуннов и ползунов), смонтированных на станине, жестко соединенной с фундаментом, последний будет совершать вынужденные колебания, которые могут быть значительными, если не подобрать правильно его размеры.

В работе рассмотрена задача о расчете вынужденных колебаний фундамента, на котором смонтирован подвешенный кривошипно-шатунный механизм, и расчет фундамента двухцилиндровой вертикальной машины.

Задача решается при следующих допущениях.

1. Имеется плоскость симметрии, перпендикулярная оси вала кривошипа (задача плоская).
2. Пренебрегаем весом (массой) кривошипов, что может быть оправдано малыми размерами или уравновешиванием.
3. Общий центр тяжести установки, т. е. фундамента и

машины, в равновесном положении находится на одной вертикали с центром тяжести площади подошвы фундамента.

4. Угловая скорость основного вала постоянна.

5. Из внешних сил учитываются вес фундамента со стальной, вес движущихся частей (ползуны и шатуны), силы инерции и упругие силы сопротивления сжатию и сдвигу на подошве фундамента, причем, последние учитываются по линейному закону.

Для составления дифференциальных уравнений колебаний фундамента использована теорема о движении центра тяжести и теорема о кинетическом моменте относительно центра тяжести, причем, реакции движущихся частей на фундамент входят в разряд внешних сил и происходят от весов и сил инерции в переносном вместе с фундаментом и в относительном движении этих частей по отношению к фундаменту.

Для решения системы дифференциальных уравнений применяется метод малого параметра Пуанкаре. Малый параметр  $\mu$  входит в дифференциальное уравнение органически. Он является отношением массы шатуна (шатунов) к общей массе фундамента и машины. Известный метод малого параметра Пуанкаре обычно применяется к задачам, система дифференциальных уравнений которых имеет нормальный вид [5], [6].

В этой задаче встречается случай, когда малый параметр входит в коэффициенты при старших производных. Важность изучения этого вопроса отмечалась в обзорном докладе [2] на межвузовской конференции по колебаниям механических систем.

В работе составлены дифференциальные уравнения более полные, чем в работах [1], [7], дано периодическое решение 1-го приближения и указан путь получения решения любого приближения.

Геометрические, кинематические соотношения и определения сил давления на фундамент рассмотрены в работе [6].

## § 1. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЯ ФУНДАМЕНТА ПОДВЕШЕННОГО КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

Составим дифференциальные уравнения колебания фундамента. Пусть в некоторый момент времени  $t$  центр тяжести фундамента сместился из начального вертикального упруго-

равновесного положения  $O$ , при котором фундамент дал осадку  $f$  от статического действия веса  $P_{\text{общ.}}$  всей установки в новое положение  $C$  с координатами  $X_c, Y_c$  и повернулся вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести  $C$ , на угол  $\Theta$  (фиг. 1). При этом, как видно из чертежа, любая элементарная площадка основания (имеющего форму прямоугольника) будет иметь смещения: горизонтальные  $X_c - h\Theta$  и вертикальные  $Y_c + Z\Theta$ .

Дифференциальные уравнения колебания фундамента будут иметь вид:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = N'_x + N''_x + F_x.$$

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = N'_y + N''_y + F_y + P.$$

$$Ii_c \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = m \omega m_c (\bar{N}') + m \omega m_c (\bar{N}'') + \sum m \omega m_c (\bar{F}_i) + m \omega m_c (\bar{P}_{c \text{ ц.}}), \quad (1)$$

где

$M$  — масса фундамента;

$\bar{N}'$  и  $\bar{N}''$  — силы давления подвижных частей на фундамент, приложенные в точках  $A$  и  $M''$ ;

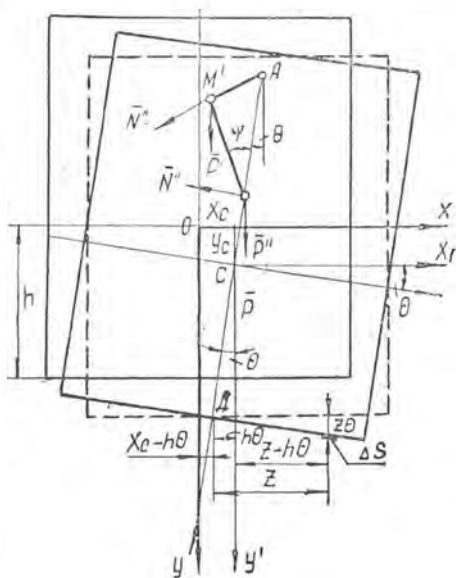
$Ii_c$  — момент инерции массы фундамента и машины относительно оси, проходящей через их общий центр тяжести и перпендикулярной к плоскости;

$m \omega m_c (\bar{N}') + m \omega m_c (\bar{N}'')$  — момент сил давления относительно центра тяжести;

$P$  — вес фундамента;

$P'$  и  $P''$  — силы, приложенные в точках  $M'$  и  $M''$  от веса шатуна;

$m' = m \frac{l''}{l}$  и  $m'' = m \frac{l'}{l}$  — сосредоточенные массы, в точках  $M'$  и  $M''$ ;



Фиг. 1.

$m' + m'' - m$  — масса шатуна;

$\Sigma \text{mom}_O(F_i)$  — главный момент упругих сил грунта относительно  $O$ ;

$F_x, F_y$  — проекции результирующих упругих сил грунта на оси  $OX$  и  $OY$ .

Согласно литературе [1], [7]  $F_x, F_y$  и  $\Sigma \text{mom}_O(\bar{F}_i)$  могут быть выражены формулами

$$F_x = -C_x S (X_c - h\theta).$$

$$F_y = -C_y S (j + y_c), \quad (1.1)$$

$$\Sigma \text{mom}_c(\bar{E}_i) = C_x S h X_c - (C_x S h^2 + C_\theta I_1) \theta,$$

где  $C_\theta$  — коэффициент упругого неравномерного сжатия,  $\text{кг/см}^3$ ;

$C_y$  — коэффициент упругого равномерного сжатия,  $\text{кг/см}^3$ ;

$C_x$  — коэффициент упругого равномерного сдвига,  $\text{кг/см}^3$ ;

$S$  — площадь подошвы,  $\text{м}^2$ ;

$h$  — расстояние от подошвы до центра тяжести фундамента,  $\text{м}^2$ ;

$I_{In}$  — момент инерции площади основания относительно оси, проходящей через точку  $D$ , перпендикулярной плоскости чертежа;

$\varphi = \omega t$  — угол поворота кривошипа,  $\lambda = \frac{r}{l}$ ;

$r, l$  — длина кривошипа и шатуна;

$\psi_1$  — угол между направляющей ползуна и осью шатуна;

$l'$  — расстояние центра тяжести шатуна до головки шатуна  $M'$ ;

$\rho$  — радиус инерции шатуна относительно оси проходящей через его центр тяжести;

$a$  — расстояние от оси вала кривошипа по вертикали до центра тяжести фундамента.

Развернем уравнения [1], получим систему дифференциальных уравнений.

$$M \frac{d^2 X_c}{dt^2} = -C_x (X_c - h\theta) S - m' \left[ \frac{d^2 X_c}{dt^2} - \frac{d^2 \theta}{dt^2} (r \cos(\theta + \varphi) - a \cos \theta) + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 (r \sin(\theta + \varphi) - a \sin \theta) + r \omega^2 \sin(\theta + \varphi) + 2r \omega \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta + \varphi) \right] - m'' \left[ \frac{d^2 X_c}{dt^2} + \frac{d^2 \theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - \right.$$

$$-l \cos \psi) \cos \Theta - \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \Theta + r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \sin \Theta + 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} (\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi) \cos \Theta \Big]; \quad (1.2)$$

$$M \frac{d^2 Y_c}{dt^2} = -C_y S Y_c - m' \left[ \frac{d^2 Y_c}{dt^2} - \frac{d^2 \Theta}{dt^2} (r \sin (\Theta + \varphi) - a \sin \Theta) - \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (r \cos (\Theta + \varphi) - a \cos \Theta) - r\omega^2 \cos (\Theta + \varphi) - 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} \cos (\Theta + \varphi) \right] + m'' \left[ \frac{d^2 Y_c}{dt^2} + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \Theta + \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cos \Theta - r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \cos \Theta + 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} (\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi) \sin \Theta \right]; \quad (1.3)$$

$$I_z \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = C_x Sh X_c - (C_x Sh^2 + C_{\Theta} I_1 - P_{c_{\Theta}} h) \Theta - m' \left[ \frac{d^2 Y_c}{dt^2} - \frac{d^2 \Theta}{dt^2} (r \sin (\Theta + \varphi) - a \sin \Theta) - \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (r \cos (\Theta + \varphi) - a \cos \Theta) - r\omega^2 \cos (\Theta + \varphi) - 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} \cos (\Theta + \varphi) \right] a \sin \Theta + p' a \sin \Theta - m' \left[ \frac{d^2 X_c}{dt^2} - \frac{d^2 \Theta}{dt^2} (r \cos (\Theta + \varphi) - a \cos \Theta) - \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (a \sin \Theta - r \sin (\Theta + \varphi) + r\omega^2 \sin (\Theta + \varphi) + 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} \sin (\Theta + \varphi)) \right] a \cos \Theta - m'' \left[ \frac{d^2 Y_c}{dt^2} + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \Theta + \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cos \Theta - r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \cos \Theta + 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} (\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi) \sin \Theta \right] (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \Theta + p'' (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \Theta - m'' \left[ \frac{d^2 X_c}{dt^2} + \frac{d^2 \Theta}{dt^2} (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cos \Theta - \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \sin \Theta + r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \sin \Theta + 2r\omega \frac{d\Theta}{dt} (\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi) \cos \Theta \right] (a - r \cos \varphi - l \cos \psi) \cos \Theta + m (l'l'' - \rho^2) \left\{ \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - \lambda \omega^2 (1 - \lambda)^2 \left[ \left(1 + \frac{9}{8} \lambda^2\right) \sin \varphi - \frac{3}{8} \lambda^2 \sin 3\varphi \right] \right\}. \quad (1.4)$$

## § 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ФУНДАМЕНТА

Для интегрирования системы уравнений (1.2), (1.3), (1.4) применим метод малого параметра, причем за параметр примем  $\mu = \frac{m}{M+m} = \frac{m}{M_{\text{общ.}}}$  и учитывая введенные выше обозначения

будем иметь следующие соотношения  $\frac{m'}{M_{\text{общ.}}} = \mu \frac{l''}{l}$  и

$\frac{m''}{M_{\text{общ.}}} = \mu \frac{l'''}{l}$ . Систему уравнений линеаризуем только в отношении  $\cos \Theta \approx 1$  и  $\sin \Theta \approx \Theta$ .

Решение данной системы дифференциальных уравнений представим в виде рядов

$$\begin{aligned} X_c &= X_{c0} + \mu X_{c1} + \mu^2 X_{c2}; \\ Y_c &= Y_{c0} + \mu Y_{c1} + \mu^2 Y_{c2}; \\ \Theta &= \Theta_0 + \mu \Theta_1 + \mu^2 \Theta_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставим значение  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $\Theta$  в систему дифференциальных уравнений (1.2), (1.3), (1.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , предварительно разделив первые два уравнения на  $M_{\text{общ.}}$ , а третье на  $I_c = \rho_1^2 M_{\text{общ.}}$  и учитывая введенные обозначения, получим систему нулевого приближения (порождающую) при  $\mu^0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_{c0}}{dt^2} + a_0 X_{c0} - b_0 \Theta &= 0, \\ \frac{d^2 Y_{c0}}{dt^2} + K_0^2 Y_{c0} &= 0; \\ \frac{d^2 \Theta_0}{dt^2} - a_1 X_{c0} + b_1 \Theta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} K_0^2 &= \frac{c_y S}{M_{\text{общ.}}}; \quad a_0 = \frac{C_x S}{M_{\text{общ.}}}; \quad b_0 = \frac{C_x S h}{M_{\text{общ.}}} = a_0 h; \\ a_1 &= \frac{C_x S h}{\rho_1^2 M_{\text{общ.}}} = \frac{b_0}{\rho_1^2}; \quad b_1 = \frac{C_x S h^2 + (C_0 I_1 - P_{\text{общ.}} h)}{\rho_1^2 M_{\text{общ.}}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Порождающая система (1.6) соответствует свободным колебаниям фундамента и частоты собственных колебаний фундамента определяются по следующим формулам:

$$K_0^2 = \frac{C_y S}{M_{\text{общ.}}};$$

$$P_{1,2}^2 = \frac{a_0 + b_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a_0 + b_1}{2}\right)^2 - (a_0 b_1 - b_0 a_1)}. \quad (1.8)$$

В нулевом приближении координаты вынужденных колебаний центра тяжести фундамента и их производные равны нулю.

$$X_{c0} = Y_{c0} = \Theta_0 = X'_{c0} = Y'_{c0} = \Theta'_0 = 0. \quad (1.9)$$

Учитывая условие (1.9), получим дифференциальные уравнения первого приближения при  $\mu$  с известной правой частью, функцией времени.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_{c1}}{dt^2} + K_0^2 Y_{c1} &= r\omega^2 \cos \omega t + l'\lambda^2 \omega^2 \cos 2\omega t; \\ \frac{d^2 X_{c1}}{dt^2} + a_0 X_{c1} - b_0 \Theta_1 &= -l''\lambda \omega^2 \sin \omega t; \\ \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} - a_1 X_{c1} + b_1 \Theta_1 &= A' \sin \omega t + A''' \sin 3\omega t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где введены обозначения:

$$A' = - \frac{l'' a_1 \lambda \omega^2 + (l' l'' - \rho^2) \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \left(1 + \frac{9}{8} \lambda^2\right)}{\rho_1^2}, \quad (1.11)$$

$$A''' = \frac{(l' l'' - \rho^2) \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \frac{3}{8} \lambda^2}{\rho_1^2}.$$

Решение системы уравнений (1.10), соответствующее только вынужденным колебаниям фундамента, будет:

$$\begin{aligned} Y_c &= \mu \left( \frac{r\omega^2}{K_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{l'\lambda^2 \omega^2}{K_0^2 - 4\omega^2} \cos 2\omega t \right); \\ X_c &= \mu (b' \sin \omega t + b''' \sin 3\omega t); \\ \Theta &= \mu (C' \sin \omega t + C''' \sin 3\omega t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где введены обозначения:

$$b' = \frac{A' b_0 - l'' \lambda \omega^2 (b_1 - \omega^2)}{(b_1 - \omega^2) (a_0 - \omega^2) - b_0 a_1}; \quad (1.13)$$

$$C' = \frac{A' (a_0 - \omega^2) - l'' a_1 \lambda \omega^2}{(b_1 - \omega^2) (a_0 - \omega^2) b_0 a_1}; \quad (1.14)$$

$$b''' = \frac{A''' b_0}{(b_1 - 9\omega^2)(a_0 - 9\omega^2) - b_0 a_1}; \quad (1.15)$$

$$C''' = \frac{A''' (a_0 - 9\omega^2)}{(b_1 - 9\omega^2)(a_0 - 9\omega^2) - b_0 a_1}. \quad (1.16)$$

Для получения решения второго приближения, систему (1.12) можно подставить в дифференциальные уравнения с членами  $\mu^2$ . При этом получили бы снова систему неоднородных линейных уравнений, которую снова, как и ранее проинтегрировали бы и т. д. до любого нужного нам приближения. В данной статье ограничились только первым приближением.

### § 3. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ФУНДАМЕНТА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ДВУХЦИЛИНДРОВОЙ МАШИНЫ С ЛИНЕЙНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ЦИЛИНДРОВ

Цилиндры располагаются в одной плоскости, проходящей через ось коленчатого вала. Начало координат совместим с центром инерции фундамента и машины. Ось  $Z$  направим вертикально вниз, параллельно осям скольжения поршней, ось  $Y$  горизонтально, параллельно оси коленчатого вала и ось  $X$  горизонтально, как показано на фиг. 2. Задачу решаем при тех же допущениях, которые указывались выше и добавочно, что размеры кривошипно-шатунных механизмов одинаковы. Кривошипы механизмов закреплены на валу относительно друг друга под углом  $\alpha$  (угол заклинивания). Углы поворота кривошипов, отсчитываемые по часовой стрелке от вертикали, будут для первого кривошипа  $\varphi_1 = \omega t$  и для второго  $\varphi_2 = \omega t + \alpha$ .

Дифференциальные уравнения колебания фундамента будут иметь вид:

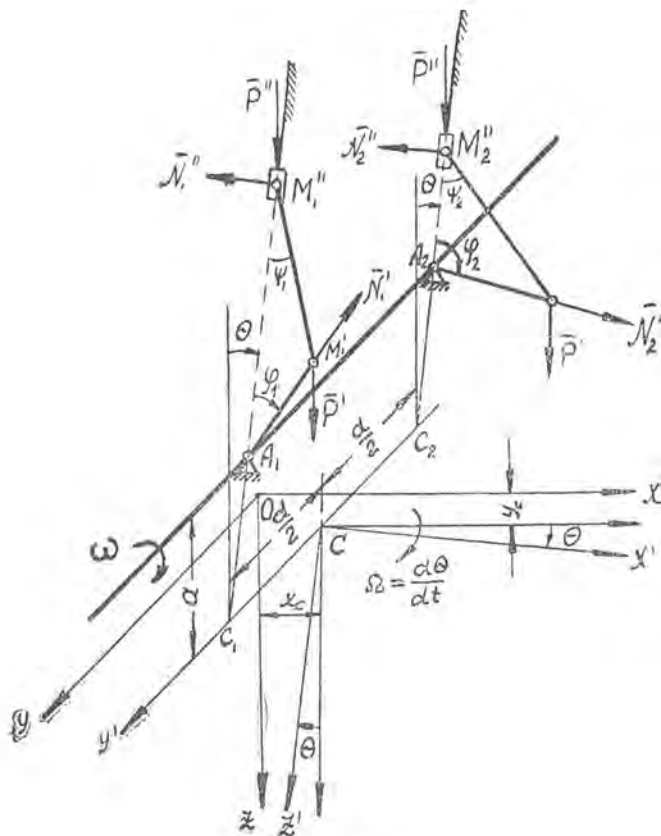
$$M \frac{d^2 X_c}{dt^2} = N'_x + N''_x + F_x.$$

$$M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = N'_z + N''_z + F_z + P.$$

$$I_{y1} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \text{mom}_{y1} (\bar{N}') + \text{mom}_{y1} (\bar{N}'') + \Sigma \text{mom}_{y1} (\bar{F}_i) + \text{mom}_{y1} (\bar{P}_{\text{общ}}), \quad (2.1)$$

где  $\bar{N}' = \bar{N}'_1 + \bar{N}'_2$  и  $\bar{N}'' = \bar{N}''_1 + \bar{N}''_2$ .





Фиг. 2.

#### § 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для интегрирования системы применим также метод малого параметра. За малый параметр примем отношение

$$\mu = \frac{2m}{M + 2m} = \frac{2m}{M_{\text{общ}}}.$$

Так же, как и в § 3, представим решение  $X_c$ ,  $Z_c$ ,  $\Theta$  в виде рядов

$$X_c = X_{c0} + \mu X_{c1} + \mu^2 X_{c2}.$$

$$Z_c = Z_{c0} + \mu Z_{c1} + \mu^2 Z_{c2}.$$

$$\Theta = \Theta_0 + \mu \Theta_1 + \mu^2 \Theta_2.$$

(2.2)

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получим дифференциальные уравнения нулевого приближения.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I_{c0}}{dt^2} + K_0^2 Z_{c0} &= 0, \\ \frac{d^2 X_{c0}}{dt^2} + a_0 X_{c0} - b_0 \Theta_0 &= 0, \\ \frac{d^2 \Theta_0}{dz^2} - a_1 X_{c0} + b_1 \Theta_0 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} K_0^2 &= \frac{C_2 S}{M_{\text{общ.}}}; \quad a_0 = \frac{C_x S}{M_{\text{общ.}}}; \quad b_0 = \frac{C_x S h}{M_{\text{общ.}}} = a_0 h; \\ a_1 &= \frac{C_x S h}{Y_{y1}} = \frac{b_0}{\rho_1^2}; \quad b_1 = \frac{C_x S h^2 + C_\Theta Y_1 - P_{\text{общ.}} h}{Y_{y1}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

и с учетом условия (1.9) получим систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого приближения с известной правой частью

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z_{c1}}{dt^2} + K_0^2 Z_{c1} &= -\frac{r\omega^2}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \frac{l^1 \lambda^2 \omega^2}{2} (\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2), \\ \frac{d^2 X_{c1}}{dt^2} + a_0 X_{c1} - b_0 \Theta_1 &= \frac{l'' \lambda \omega^2}{2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} - a_1 X_{c1} + b_1 \Theta_1 &= A' (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) + \\ &+ A''' (\sin 3\varphi_1 + \sin 3\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\text{где } A' = \frac{l'' a \lambda \omega^2 - (l' l'' - \rho^2) \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) (1 + \frac{9}{8} \lambda^2)}{2 \rho_1^2}. \quad (2.6)$$

$$A''' = \frac{(l' l'' - \rho^2) \lambda \omega^2 (1 - \lambda^2) \frac{3}{8} \lambda^2}{2 \rho_1^2}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.5) для некоторых частных случаев в зависимости от угла  $\alpha$  заклинивания кривошипов.

1. Угол заклинивания  $\alpha = 180^\circ$  системы (2.5) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 Z_{c1}}{dt^2} + K_0^2 Z_{c1} = -l' \lambda^2 \omega^2 \cos 2\omega t.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X_{c1}}{dt^2} &= a_0 X_{c1} + b_0 \Theta_1 = 0, \\ \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} - a_1 X_{c1} + b_1 \Theta_1 &= 0,\end{aligned}\quad (2.5')$$

2. Угол заклинивания  $\alpha=90^\circ$ , система (2.5) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^3 Z_{c1}}{dt^2} + K_0^2 Z_{c1} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} r \omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{d^2 X_{c1}}{dt^2} + a_0 X_{c1} - b_0 \Theta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} l'' \lambda \omega^2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{d^2 \Theta_1}{dt^2} - a_1 X_{c1} + b_1 \Theta_1 &= \sqrt{2} A' \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \\ &\quad - \sqrt{2} A''' \sin 3\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}\quad (2.5'')$$

Угол заклинивания  $\alpha=90^\circ$  часто встречается у компрессоров вертикального типа, имеющих два цилиндра.

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (2.5'') методом неопределенных коэффициентов, получим решение вынужденных колебаний в первом приближении.

$$\begin{aligned}Z_c &= -\mu \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r \omega^2}{K_0^2 - \omega^2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \\ X_c &= \mu \left[ b' \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + b''' \sin 3\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right], \\ \Theta &= \mu \left[ c' \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + c''' \sin 3\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right],\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\text{где } b' = \frac{\sqrt{2} A' b_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} l'' \lambda \omega^2 (b_1 - \omega^2)}{(a_0 - \omega^2)(b_1 - \omega^2) - a_1 b_0},$$

$$c' = \frac{\sqrt{2} A' (a_0 - \omega^2) + \frac{\sqrt{2}}{2} l'' \lambda a_1 \omega^2}{(a_0 - \omega^2)(b_1 - \omega^2) - a_1 b_0}.$$

$$b''' = \frac{\sqrt{2} A''' b_0}{(a_0 - 9\omega^2)(b_1 - 9\omega^2) - a_1 b_0},$$

$$c''' = -\frac{\sqrt{2} A''' (a_0 - 9\omega^2)}{(a_0 - 9\omega^2)(b_1 - 9\omega^2) - a_1 b_0}.\quad (2.9)$$

В заключение заметим, если в точке  $M''$  присоединена еще какая-то точка  $m_1$  (например, ползун пресса, поршень компрессора или двигателя) то, считая эту точечную массу

принадлежащей шатуну, при расчете центра тяжести шатуна, а, следовательно, и длина  $l, l''$  масса шатуна будет  $m + m_1; m' = (m + m_1) \frac{l''}{l}; m'' = (m + m_1) \frac{l'}{l} \mu = \frac{m + m_1}{M + m + m_1}$  или  $\mu = \frac{2(m + m_1)}{M + 2(m + m_1)}$  для двухцилиндровой машины и все формулы и расчет остаются прежними.

*Пример расчета фундамента под кривошипный горячештамповочный пресс с номинальным усилием 1600 т.*

### Задание на проектирование.

Вес пресса — 97,5 т;

Число ходов — 65 ход/мин или = 6,8 1/сек;

Ход ползуна — 305 мм;

Отношение радиуса кривошипа к длине шатуна  $\lambda = 0,17$ .

Расстояние от оси вала кривошипа до поверхности фундамента по вертикали 3,64 м.

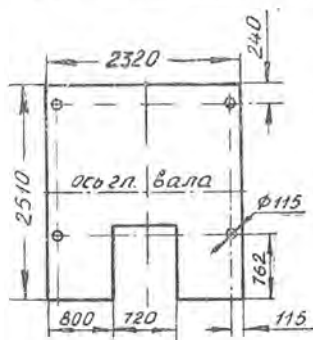
Расстояние от центра тяжести пресса по вертикали до поверхности фундамента 1,3 м.

Расстояние центра тяжести шатуна до центра головки шатуна  $l' = 0,35 l$ .

Вес ползуна 5000 кг.

Вес шатуна 3650 кг.

Размеры и форма основания пресса (фиг. 3).



Фиг. 3.

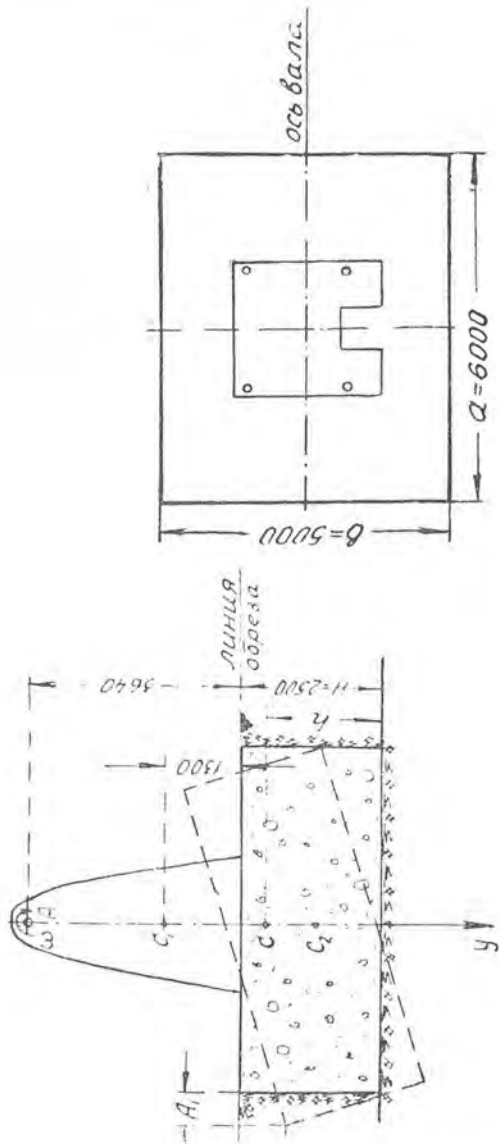
Материал фундамента — армированный бетон марки 90 с удельным весом 2,2 т/м<sup>3</sup>.

Все данные взяты из литературы [3], [4].

Расчетные значения для средней прочности грунта (глина, суглинок и песок) с допускаемым давлением  $P_0 = 2,5 \text{ кг/см}^2$ .

Значение коэффициентов упругости и грунта, являющегося основанием фундамента, принимаем согласно таблице 8 монографии [1].  $C_{II} = 4 \times 10^3 \text{ т/м}^3, C_0 = 8 \cdot 10^3 \text{ т/м}^3, C_x = 2 \times 10^3 \text{ т/м}^3$ . Габаритный чертеж фундамента — фиг. 4.

Предварительно намечаем размеры фундамента  $a = 6 \text{ м}, b = 5 \text{ м}, H = 2,5 \text{ м}$ .



Фиг. 4.

Статическое удельное давление на фундамент

$$\zeta_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{97,5}{5,27} = 18,5 \text{ т/м}^3 = 1,85 \text{ кг/см}^2,$$

что намного меньше допустимого удельного давления бетона. Вес всей установки  $P_{\text{общ.}} = 262,5 \text{ т}$ .

Статическое удельное давление на грунт

$$\sigma = \frac{P_{\text{общ.}}}{S} = \frac{262,5}{30} = 8,75 \text{ т/м}^2 = 0,875 \text{ кг/см}^2 P_0.$$

Относительные значения эксцентриситета незначительны, ими пренебрегаем.

Расстояние от подошвы до общего центра тяжести фундамента.

$$h = \frac{\sum Q_i I_i}{\sum Q_i} = \frac{89 \cdot 3,8 + 165 \cdot 125}{254} = 214 \text{ м.}$$

Определение моментов инерции масс и подошвы фундамента. Момент инерции какого-либо  $i$ -го элемента установки относительно оси, проходящей через общий центр тяжести установки будет

$$I_i = I_i^* + m_i r_i^2,$$

где  $I_i^*$  — момент инерции  $i$ -го элемента относительно оси, проходящей через собственный центр тяжести элемента;  
 $r_i$  — расстояние от центра тяжести элемента до общего центра тяжести.

	$I_{yi}^*$ тм.сек. <sup>2</sup>	$I_{xi}^*$ тм.сек. <sup>2</sup>	$r_{yi}, \text{ м}$ $r_{yi}^2$	$r_{xi}, \text{ м}$ $r_{xi}^2$	$I_{yi}$ тм.сек. <sup>2</sup>	$I_{xi}$ тм.сек. <sup>2</sup>
Пресс	0	0	1,66 2,75	1,66 2,75	24,95	24,95
Фундамент	53,573	44,063	0,89 0,69	0,89 0,79	72,861	57,351

Складывая моменты инерции масс отдельных элементов, получили величины моментов инерции масс всей установки.

$$I_c = 97,811 \text{ тм.сек.}^2, I_x = 82,301 \text{ тм.сек.}^2.$$

Моменты инерции площади подошвы относительно осей, проходящих параллельно главным

$$I_{1x} = \frac{ab^3}{12} = 62,5 \text{ м}^4, \quad I_D = \frac{ba^3}{12} = 90 \text{ м}^4,$$

длина кривошипа  $r = 0,153 \text{ м}$ ,

длина шатуна  $l = \frac{r}{\lambda} = 0,888 \text{ м}$ ,

общий центр тяжести шатуна и ползуна

$$l' = \frac{\sum P_i l_i}{\sum P_i} = 0,644 \text{ м}; \quad l'' = l - l' = 0,244 \text{ м}.$$

Радиус инерции шатуна относительно оси, проходящей через общий центр тяжести шатуна и ползуна

$$\rho^2 = 0,34 l^2 = 0,268 \text{ м}^2.$$

Общая масса шатуна и ползуна

$$m + m_1 = \frac{8,65}{9,81} = 0,882 \frac{\text{м.сек.}^2}{\text{м}}.$$

Точечные массы

$$m' = (m + m_1) \frac{l''}{l} = 0,247 \frac{\text{м.сек.}^2}{\text{м}};$$

$$m'' = (m + m_1) \frac{l'}{l} = 0,635 \frac{\text{м.сек.}^2}{\text{м}};$$

малый параметр  $\mu = \frac{m + m_1}{M_{\text{общ.}}} = 0,031$ .

Радиус инерции всей установки относительно оси, проходящей через общий центр тяжести  $\rho_1^2 = \frac{I_c}{M_{\text{общ.}}} = 3,521 \text{ м}^2$ .

Определение коэффициентов, необходимых для вычисления амплитуд вынужденных колебаний фундамента производим по формулам. Пренебрегаем членами, содержащими  $\lambda$  в степени выше второй:

$$K_0^2 = \frac{C_y S}{M_{\text{общ.}}} = 4,31 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек.}^2}; \quad a_0 = \frac{C_y S}{M_{\text{общ.}}} = 2,2 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{сек.}^2},$$

$$b_0 = a_0 h = 4,71 \cdot 10^3 \text{ м.сек.}^2; \quad a_1 = \frac{b_0}{r_1^2} = 1,34 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{м.сек.}^2},$$

$$b_1 = \frac{C_y S h^2 + C_{\omega} I_1 - P_{\text{общ.}} h}{I_c} = 10,2 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек.}^2},$$

$$A' = - \frac{\lambda \omega^2}{\rho_1^2} (l''a + l'l'' - \rho^2) = - 1,92 \frac{1}{\text{сек.}^2},$$

$$b' = \frac{A'b_0 - l''\lambda \omega^2 (b_1 - \omega^2)}{(b_1 - \omega^2)(a_0 - \omega^2) - a_1 b_0} = - 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$C' = \frac{A'(a_0 - \omega^2) - l''\lambda a_1 \omega^2}{(b_1 - \omega^2)(a_0 - \omega^2) - a_1 b_0} = - 0,43 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Амплитуды вынужденных колебаний фундамента вычисляем по уравнениям (1.12).

$$Y_c = \mu \left( \frac{r\omega^2}{K_0^2 - \omega^2} + \frac{l'\omega^2 \lambda^2}{K_0^2 - 4\omega^2} \right) = 0,057 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,057 \text{ мм.}$$

$$X_c = \mu b' = - 0,058 \cdot 10^{-3} \text{ м} = - 0,058 \text{ мм.}$$

$$\Theta = \mu C' = - 13,3 \cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$

В практических расчетах обычно требуется определить амплитуды колебаний верхнего обреза фундамента.

Вертикальное перемещение верхнего обреза фундамента  $A_2 = Y_c + \Theta \frac{a}{2} = 0,096 \text{ мм}$ , горизонтальное перемещение верхнего обреза  $A_1 = X_c + 0,36 \Theta = 0,067 \text{ мм}$ .

Расчет показывает, что амплитуды колебаний фундамента значительно меньше допустимых, а, следовательно, размеры фундамента выбраны правильно.

Но если амплитуды получились больше допустимых, то необходимо изменить величину стороны подошвы фундамента, перпендикулярной оси вращения и снова произвести расчет.

## ВЫВОДЫ

Вычисление амплитуд вынужденных колебаний производится без вычисления неуравновешенных сил инерции.

Нет необходимости вычислять моменты инерции масс относительно осей, проходящих через центр тяжести подошвы и отношение моментов инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести всей установки к моментам инерции масс относительно осей, проходящих через центр тяжести подошвы.

Предлагаемый метод является более точным и общим.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Баркан, Динамика оснований и фундаментов. Стройвоенмориздат. М., 1948.
  2. В. В. Балотин, Г. Ю. Джаналидзе, Я. Г. Пановка, Современные проблемы теории колебаний механических систем. Известия вузов, Машиностроение, № 4, 1963.
  3. А. А. Игнатов, Кривошипные горячештамповочные прессы. Государственное научно-технич. изд. машиностроительной литературы, М., 1953.
  4. Каталог, Заготовительно-штамповочное оборудование, М., 1960.
  5. И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Госуд. изд. технико-теоретической литературы, Ленинград, 1949.
  6. С. М. Макаров, М. Ф. Кричевер, Применение метода малого параметра к задаче о вынужденных колебаниях фундамента кривошипно-шатунного механизма. Сб. научных трудов Куйбышевского авиационного института, выпуск XIX, 1964.
  7. О. А. Савинов, Фундаменты под машины. Ленинград, 1955.
-