

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Шепелев С.М., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е.

Преобразователь сферической конструкции представляет собой полусферический конденсатор (рис.1), между электродами которого поддерживается постоянная разность потенциалов.

Сформулируем основные положения на основе которых будем строить математическую модель расчета:

1. Ввиду того, что отношение начального радиуса облака плазмы R_0 к радиусам полусферических электродов «а» и «в» (рис.1) много меньше единицы, будем считать начальный радиусам полусферических электродов «а», «в» (рис.1) много меньше единицы, будем считать начальный радиус R_0 к радиусам полусферических электродов «а», «в» (рис.1) много меньше единицы, будем считать начальный радиус R_0 равным нулю, т.е. в начальный момент времени заряженные частицы сосредоточены в точке.

2. С момента расширения облака плазмы расстояния между ионами становятся настолько большими, что их взаимодействием между собой можно пренебречь.

3. Ионы облака плазмы обладают одинаковой массой и одинаковым зарядом.

4. вектора начальных скоростей равновероятно направлены в любую сторону.

5. Ионы, вектора начальных скоростей которых составляют с вектором $\overline{НО}$ угол, превышающий 90° (рис.1), не достигают коллектора (приемника), т.к. рекомбинируют на мишени ввиду больших начальных скоростей.

Положение точки в пространстве в сферической системе координат определяется модулем ρ радиус – вектора $\vec{\rho}$, соединяющего начало координат с данной точкой пространства и угловыми координатами α и ψ .

α - угол между вектором $\vec{\rho}$ и плоскостью П. Углы α и ψ

изменяются соответственно от 0 до 90° и от 0 до 2π .

В силу ограниченности рассматриваемого пространства полусферическими поверхностями электродов преобразователя

$$\alpha \leq \rho \leq b.$$

Таким образом, внешняя и внутренняя полусферические поверхности полностью задаются соответственно радиусами «а» и «b». Начальное положение ионов облака плазмы задается параметрами вектора $\Gamma \rightarrow \Gamma_0 \cdot \alpha_0$.

Рассмотрим движение заряженной частицы в центральном электрическом поле.

При подключении разновидности потенциалов к сферическим электродам преобразователя электрическое поле конденсатора является центральным электрическим полем с потенциальной энергией в данной точке.

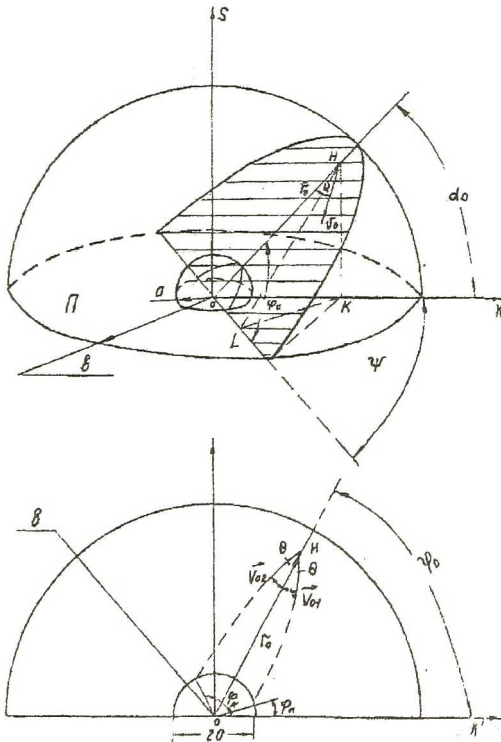


Рисунок 1.

$$P \geq (\rho) = -\frac{\xi}{\rho}, \quad (1)$$

где ξ - коэффициент пропорциональности, равный

$$\xi = \frac{v_0 * a * b}{b - a} e. \quad (2)$$

где v_0 – напряжение между обкладками конденсатора ;

b, a – радиусы внешней и внутренней полусфер ;

e – заряд электрона.

Момент импульса системы определяется векторным произведением:

$$\vec{M} = \vec{\Gamma} * \vec{P},$$

где $\vec{\Gamma}$ – радиус- вектор , соединяющий точку , определяющую местонахождение заряженной частицы и центрального электрического поля;

\vec{P} – импульс частицы , равный $\vec{P} = m\vec{v}$, где

m – масса частицы ;

\vec{v} – вектор скорости частицы.

Известно, что траектория заряженной частицы в центральном электрическом поле лежит в одной плоскости.

Запишем (2.64) в виде:

$$M = k * m * v_0 * r_0 \sin \theta. \quad (3)$$

где m, v_0 – соответственно масса и начальная скорость иона;

θ – наименьший угол между векторами \vec{v}_0 и $\vec{\Gamma}$.

$$K = \begin{cases} 1, \text{ если } (\vec{v}_0 \vec{r}_0) > 0 \\ 0, \text{ если } \vec{v}_0 \vec{r}_0 - \text{ коллинеарны;} \\ 1, \text{ если } (\vec{v}_0 \vec{r}_0) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Энергия рассматриваемой системы складывается из кинетической энергии иона и его потенциальной энергии в поле:

$$E = E_k + P(r). \quad (5)$$

Кинетическая энергия иона в полярной системе координат

$$E_k = \frac{m}{2} (\dot{r} + r \dot{\varphi}^2), \quad (6)$$

$$\text{где } \dot{r} = \frac{dr}{dt}; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Для центрального электрического поля импульс \vec{P} равен

$$P = mr^2 * \dot{\varphi}^2 \quad (7)$$

$$\text{Где } \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}$$

Тогда можно записать:

$$E = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{M}{2mr^2} + P(r) \Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - P(r) \right] - \frac{M^2}{mr^2}} \quad (8)$$

Знак "+" - случай движения частицы от центра поля;

"-" - случай движения частицы к центру поля;

Из (2.70) найдем время движения иона к центру поля

$$t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - P(r) \right] - \frac{M^2}{mr^2}}} \quad (9)$$

т.к. $d\varphi = \frac{M dt}{mr^2}$, следовательно

$$\varphi = \int_r^{r_0} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - P(r) \right] - \frac{M^2}{mr^2}}} \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) полностью задают движение иона в центральном поле.

При наличии электрического поля $v_0 > 0$, уравнение (9) запишется

$$t = \sqrt{\frac{mr_0}{2\xi}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{(\xi - 1) + \frac{r_0}{r} - \xi \sin^2 \theta * \frac{r_0^2}{r^2}}} \quad (11)$$

где $\xi = \frac{E_{k0}}{|P(r_0)|} = \frac{mv_0^2 r_0}{2\xi}$ - безразмерная величина;

обозначив $S = \frac{r}{r_0}$, перепишем (9) и (10) в виде:

$$t = \sqrt{\frac{mr_0}{2\xi}} \int_{S_1}^1 \frac{S dS}{\sqrt{(\xi - 1)S^2 + S - \xi \sin^2 \theta}} \quad (12)$$

$$\varphi = \varphi_0 + k\omega(\xi \sin \theta, r), \quad (13)$$

где $W(\xi, \theta, r)$ - функция угла смещения.

Необходимыми условиями попадания иона на катод являются:

1 $r_{\min} \leq a$, т.е. максимально возможное приближение иона к центру поля было меньше или равно радиусу катода.

2. $0 \leq \varphi_k \leq \pi$. Т.е. угловая координата, соответствующая точке попадания иона на катод лежала на полусфере катода.

Условие 1 можно записать в виде:

$$(\xi - 1) \frac{a^2}{r_0^2} + \xi \sin^2 \theta \geq 0,$$

$$\sin^2 \theta \leq \frac{a^2}{r_0^2} + \frac{\frac{a}{r_0} - \frac{a^2}{r_0^2}}{\xi},$$

$$\text{или } \theta \leq \arcsin \sqrt{\frac{a^2}{r_0^2} + \frac{\frac{a}{r_0} - \frac{a^2}{r_0^2}}{\xi}}; \quad (14)$$

условие 2 представим в виде:

$$-k\omega(\xi, \varpi, a) \leq \varphi_0 \leq \pi - k\omega(\xi, \theta, a). \quad (15)$$

При отсутствии поля ($P(r)=0$) будем иметь:

$$t = \frac{r_0}{v_0} * \int_{r/r_0}^1 \frac{S^* ds}{\sqrt{S^2 - \sin^2 \theta}} = \frac{r_0}{v_0} * \left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta} - \sqrt{\frac{r}{r_0} - \sin^2 \theta} \right) \quad (16)$$

$$\varphi = \varphi_0 + K * \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \arccos \frac{r_0}{r} \sin \theta \right) \quad (17)$$

Необходимыми условиями попадания иона на катод являются:

$$\varphi \leq \arcsin \frac{a}{r_0}. \quad (18)$$

$$0 \leq \varphi_0 + K * \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \arccos \frac{r_0}{a} \sin \theta \right) \leq \pi . \quad (19)$$

Таким образом, область допустимых значений угла θ для преобразователя без поля (19) много меньше области допустимых значений при наличии поля, а время пролета иона в промежутке анод-катод для случая отсутствия поля увеличивается.

Для нахождения дифференциала заряда воспользуемся максвелловской функцией распределения частиц по скоростям, которая в сферической системе координат имеет вид :

$$\frac{dN}{N_0} = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} * e^{-\frac{mv^2}{2T}} * \sin \theta d\theta dv d\psi , \quad (20)$$

где N_0 - общее число ионов в облаке плазмы;

T - температура облака плазмы;

$\frac{dN}{N_0 d\theta dv d\psi}$ - дифференциальная плотность ионов с параметрами;

θ, ψ - угловые координаты.

Для распределения, при котором начальная скорость ионов равна некоторой средней V_{cp} в сферической системе координат будем иметь :

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{1}{4\pi} \delta \left(\frac{v}{v_{cp}} - 1 \right) \sin \theta d\theta \frac{v}{v_{cp}} d\theta d\psi , \quad (21)$$

где $\delta(v/v_{cp}-1)$ - смещенная дельта - функция.

Введем новую переменную z , равную $\sqrt{\frac{mv_0^2}{2T}}$.

Заметим, что переменная ξ и z связаны следующим образом:

$$z^2 = \frac{mv_0^2}{2T} \left| \frac{P(r_0)}{P(r_0)} \right| = \xi \left| \frac{P(r_0)}{T} \right| = \xi v , \quad (22)$$

где $v = \left| \frac{P(r_0)}{T} \right|$ - коэффициент пропорциональности между энергией

электрического поля и энергией облака плазмы.

С учетом вышеуказанной функции (20) и (21) примут вид:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{1}{\pi^{3/2}} * z^2 * e^{-z^2} * \sin \theta * dz * d\psi * d\theta . \quad (23)$$

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{1}{4\pi z_0} * \delta\left(\frac{z}{z_0} - 1\right) * \sin \theta * dz * d\theta * d\psi. \quad (24)$$

Переходим к дифференцированию заряда, после замены переменных $\gamma = 1 - \cos \theta$ получим с учетом максвелловского распределения

$$d\theta = \frac{\theta_0}{\pi^{3/2}} e^{-z^2} * dz d\gamma d\psi. \quad (25)$$

С учетом распределения, которое соответствует модели разлета ионов с равными скоростями по величине и изотропному распределению по направлениям.

$$d\theta = \frac{\theta_0}{4\pi z_0} \delta\left(\frac{z}{z_0} - 1\right) dz d\gamma d\psi \quad (26)$$

В общем случае, если $R(z)$ – функция распределения, то

$$d\theta = \theta_0 R(z) dz d\gamma d\psi. \quad (27)$$

Обозначим $t_{ок} = \sqrt{\frac{mr_0}{2\xi}} * r_0 f(\xi, \theta)$ и введем индикаторную функцию

$G(z, \gamma, \alpha, \psi)$. При $G(z, \gamma, \alpha, \psi) = 1$ в момент времени

$t = \sqrt{\frac{mr_0}{2\xi}} r_0 f_1(z, \gamma)$ на катоде рекомбинирует заряд

$$dQ = Q_0 * R(z) dz d\gamma d\psi,$$

$$\text{где } f_1(z, \gamma) = f\left[\frac{z^2}{v}, \arccos(1 - \gamma)\right].$$

При $G(z, \gamma, \alpha, \psi) = 0$ заряд не попадает на катод, поэтому можно сказать,

что в момент времени $t = \sqrt{\frac{mr_0}{2\xi}} f_1(z, \gamma)$ на катоде в плоскости, соответствующей углу ψ , рекомбинирует заряд, равный

$$dQ = Q_0 G(z, \gamma, \alpha, \psi) R(z) dz d\gamma d\psi. \quad (28)$$

Функция времени зависит только от z, γ и не зависит от угла ψ . Это означает, что ионы, имеющие одинаковые параметры z и γ , но разные по плоскости вектора \vec{v}_0 , рекомбинируют на катоде в одно и то же время.

При этом считаем, что все ионы достигают катода, но только одни вносят заряд, вычисляемый по формуле (28) [$G(z, \gamma, \alpha, \psi) = 1$], другие вносят

заряд, равный нулю (для них $G(z, \gamma, \alpha, \psi) = 0$) Если ионы с одинаковыми параметрами z и γ рекомбинируют в одно время, то их заряды можно просуммировать по всем плоскостям и это не внесет изменений в выходной импульс.

Таким образом

$$dQ = \int_0^{2\pi} [Q_0 G(z, \gamma, \alpha, \psi) R(z) dz d\gamma] d\psi \Rightarrow$$

$$dQ = Q_0 R(z) \int_0^{2\pi} [G(z, \gamma, \alpha, \psi) d\psi] dz d\gamma =$$

$$= Q_0 R(z) \left[\int_0^{\pi} G(z, \gamma, \alpha, \psi) d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} G(z, \gamma, \alpha, \psi) d\psi \right] dz d\gamma.$$

$$\int_0^{\pi} G(z, \gamma, \alpha, \psi) d\psi = \int_{g(z, \gamma, \alpha)}^{\pi} d\psi = \pi - g(z, \gamma, \alpha)$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} G(z, \gamma, \alpha, \psi) d\psi = \int_{g(z, \gamma, \alpha)}^{\pi} d\psi = 2\pi - \pi - g(z, \gamma, \alpha) = \pi - g(z, \gamma, \alpha)$$

$$dQ = Q_0 R(z) [\pi - g(z, \gamma, \alpha) + \pi - g(z, \gamma, \alpha)] dz d\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dQ = 2Q_0 R(z) [\pi - g(z, \gamma, \alpha)] dz d\gamma.$$

Обобщенному дифференциалу заряда ставится в соответствие некоторый момент времени t_{0K} - время рекомбинации иона на катоде, т.е.

$$t_{0K} = \sqrt{\frac{m\Gamma_0}{2\xi}} \cdot \Gamma_0 \cdot f_1(z, \gamma),$$

$$t_{0K} = \sqrt{\frac{m\Gamma_0}{2\xi}} \cdot \Gamma - \text{обуславливает размерность времени.}$$

Под временем будем понимать переменную $\tau = \sqrt{\frac{2\xi}{m\Gamma_0}} \cdot t$.

Введем величину $q = \frac{Q}{Q_0}$ - приведенный безразмерный заряд, тогда

из (5) будем иметь:

$$dq = 2R(z) [\pi - g(z, \gamma, \alpha)] dz d\gamma.$$

Зафиксируем момент времени t^* . В интервале времени $[0, t^*]$ на катоде рекомбинировали некоторые заряды. Необходимым условием реком-

бинации иона на катоде в интервале времени $[0, t^*]$ является условие: $t_{0K} \leq t^*$, заряд, рекомбинированный на катоде в течение времени t^* , равен сумме всех дифференциалов заряда, для которых $t_{0K} \leq t^*$

$$q(t^*) = 2 \int_{\Omega_r} \int [R(z)(\pi - g(z, \gamma, \alpha))] dz d\gamma,$$

где область Ω_r определяется

$$\Omega_r = \{z, \gamma : f_1(z, \gamma) \leq \tau^*\}.$$

Таким образом, получена зависимость заряда в интегральной форме.

Расчет зависимостей заряда, при газодинамическом и максвелловском распределении проведен численными методами.

Результаты расчетов приведены в виде графиков (рис.2 - рис.5).

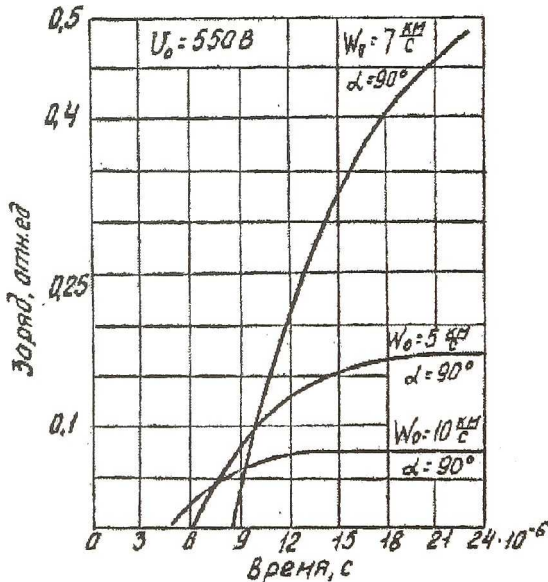
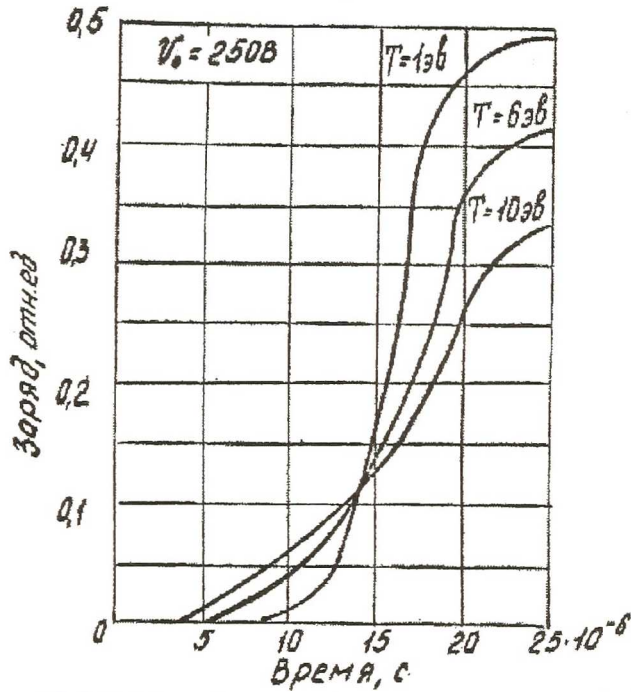
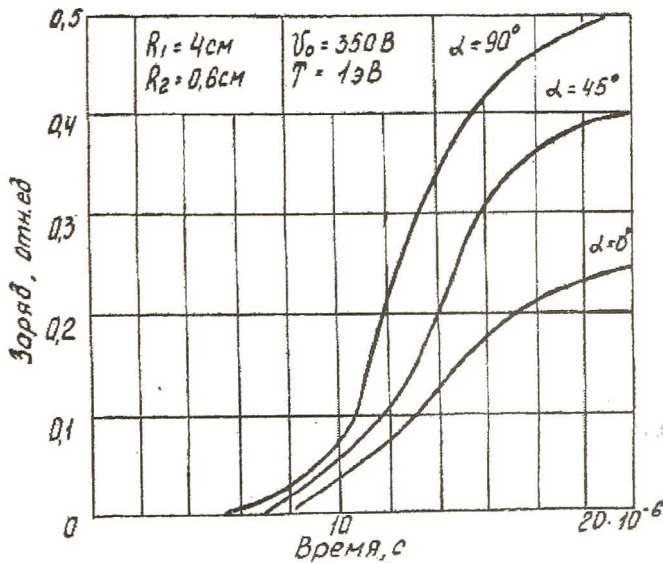


Рисунок 2 - Зависимость безразмерного заряда от времени при $W=Var$

Анализ результатов расчета функциональной зависимости заряда от времени с учетом электрического поля позволяет сделать следующие выводы:

- С увеличением скорости частицы длительность переднего фронта уменьшается, а потери заряда увеличиваются (рис.2);
- С увеличением температуры потери заряда на коллекторе увеличиваются, а начало фронта импульса сдвигается влево (рис.3).

Рисунок 3 - Зависимость безразмерного заряда от времени при $W=Var$ Рисунок 4 - Зависимость безразмерного заряда от времени при $\alpha=Var$

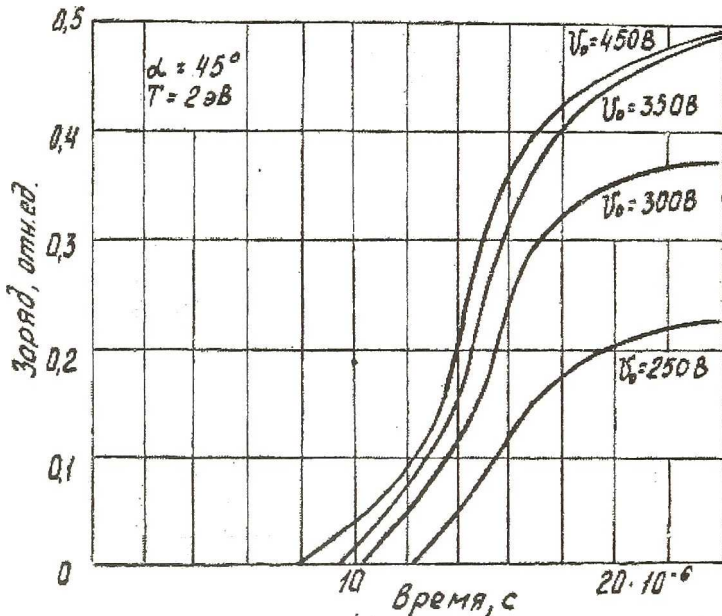


Рисунок 5- Зависимость безразмерного заряда от времени при $V_0 = Var$

Показано, что избирательная способность коллектора к той или иной части распределения искажает временную зависимость переднего фронта заряда от температуры.

- При увеличении угла попадания частиц α от 0 до 90° величина заряда увеличивается приблизительно в два раза, а длительность импульса уменьшается (рис.4);
- При увеличении напряжения между мишенью (полусферой) и коллектором преобразователь заряда увеличивается в два раза, а передний фронт импульса уменьшается (рис.5).

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Дмитриев В. Д., Чубаров Ю. Ф., Лебедев С. В.

Одной из основных задач при измерении электрических величин, таких как сопротивление и напряжение является универсальность и простота измерительного устройства. В данной работе описывается одно из таких устройств, в котором, наряду с достижением универсальности, повышены также точность измерения и быстродействие.

Устройство для измерения электрических величин (рисунок 1) состоит из генератора высокочастотного напряжения 1, счётчика импульсов 2, генератора 3 линейно-изменяющегося напряжения, радиочастотного преобразователя 4, RC-фильтра 12, состоящего из конденсаторов 13 и 15 и