МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ В СОЛНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Помельников Р.А.

В настоящее время развитие науки и техники подошло к рубежу, когда результаты экспериментов (научных, технологических) зависят от процессов, существующих при наличии гравитации. При проведении экспериментов в области материаловедения необходим создание на борту космического аппарата (КА) величины микроускорения (МУ) 10^{-4}-10^{-6} g_0 (g_0=9,8 м/с^2) [1]. Прогнозируется, что для проведения экспериментов по фундаментальным проблемам физики (например, проверки постулатов общей теории относительности) необходимо добиться величины микроускорений 10^{-10}-10^{-16} g_0 [2].

Их устранение возможно при создании условий практической невесомости. Обеспечения условий практической невесомости путем уменьшения остаточного МУ КА во время эксплуатации является трудной задачей из-за большого числа факторов, действующих на КА.

Источниками возникновения МУ являются: световое давление, гравитационное поле, микрометеориты и т.д. Одним из источников микрогравитации на борту КА является сила Ампера, возникающая при взаимодействии магнитного поля Земли и тока протекающего в солнечной батареи (СБ). Ток в СБ протекает по солнечным элементам (СЭ) и соединительным проводам.

Цель данной работы рассмотреть растекание тока в твердых телах, имеющих разную природу проводимости, но описанных через одни параметры (распределение проводимости, распределение емкости по телу, конфигурация тела).

Нахождение распределения тока в теле. Введем следующие обозначения:

$\varphi(M,t)$ -функция потенциала электрического поля в точке M в момент времени t в теле;

$c(M)$ - функция электрической емкости в точке M;

$\sigma(M)$ - функция проводимости, являющаяся коэффициентом пропорциональности между количеством заряда Δq, прошедшего через элементарную площадку ΔS за промежуток времени Δt и градиентом потенциала φ в направлении нормали к этой площадке.

$$\Delta q = -\sigma(M)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Delta S\Delta t \qquad (1)$$

Примем направление от стороны с большим потенциалом к стороне с меньшим потенциалом (градиент потенциала в этом направлении отрицателен), что определило знак минус в правой части выражения (1).

Для построения модели изменения потенциала в рассматриваемом теле, составим уравнение баланса:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3, \tag{2}$$

где ΔQ_1- изменение количества заряда в элементе объема за некоторый промежуток времени;

ΔQ_2- величина заряда, прошедшего через боковую поверхность рассматриваемого объема за некоторый момент времени;

ΔQ_3- количество заряда, генерируемое внешними источниками распределенными в пространстве и во времени.

Распишем уравнения баланса в интегральной форме. Изменение количества заряда в элементе объема ΔV за промежуток времени от момента t до $t+\Delta t$ находится как

$$\Delta Q_1 = \int_{\Delta V} c(M)\left[\varphi(M,t+\Delta t)-\varphi(M,t)\right]dV. \tag{3}$$

Определим заряд, прошедший через боковую поверхность $\Delta\Sigma$ от момента времени t до $t+\Delta t$ рассматриваемого объема ΔV:

$$\Delta Q_2 = \int_t^{t+\Delta t}\int_{\Delta V}\sigma(M)\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\mu d\tau. \tag{4}$$

Производная берется по направлению внешней нормали, что определяет знак “плюс” перед интегралом. Преобразуем поверхностный интеграл по формуле Остроградского. Примем функции $\sigma(M)$ и $\varphi(M,t)$ гладкими, тогда получим

$$\Delta Q_2 = \int_t^{t+\Delta t}\int_{\Delta V}\sigma(M)\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\mu d\tau = \int_t^{t+\Delta t}\int_{\Delta V}\sigma(M)\left(n_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+n_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+n_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\mu d\tau =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\int_{\Delta V}\sigma(M)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\left(\bar{n},x\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\left(\bar{n},y\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\left(\bar{n},z\right)\right)d\mu d\tau =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\int_{\Delta V}\operatorname{div}\left[k(M)\operatorname{grad}\varphi(M,\tau)\right]dV d\tau. \tag{5}$$

Количество заряда, генерируемое внешними источниками, распределенными в пространстве и во времени с плотностью $f(M,t)$ запишется как

$$\Delta Q_3 = \int_t^{t+\Delta t}\int_{\Delta V} f(M,\tau)dV d\tau. \tag{6}$$

Получим соотношение баланса заряда в интегральной форме. Подставим в уравнение (2) уравнения (3), (5) и (6), тогда получим

$$\int\limits_{\Delta V} c(M)\left[\varphi(M,t+\Delta t)-\varphi(M,t)\right]dV = \tag{7}$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} div\left[\sigma(M)grad\varphi(M,\tau)\right]dVd\tau + \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)dVd\tau$$

Преобразуем выражение (7) к уравнению в дифференциальной форме. Запишем выражение в левой части по формуле конечных приращений для подынтегральных выражений и вычислим выражения в левой части по формуле о среднем:

$$c(M)\left.\frac{\partial\varphi\left(M^{*},t\right)}{\partial t}\right|_{t=t^{*}}\Delta t\Delta V = div\left[\sigma(M)grad\varphi(M,\tau)\right]\Delta t\Delta V + f(M,\tau)\Delta V\Delta\tau, \tag{8}$$

где M^{*} - некоторая точка из области ΔV;

t^{*} -некоторый момент времени из промежутка времени t до $t+\Delta t$.

Разделив затем, полученное равенство (8) на $\Delta V\Delta t$ и устремляя ΔV и Δt к нулю в силу непрерывности всех членов уравнения, получим окончательное уравнение [3]:

$$c(M)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = div\left[\sigma(M)grad\varphi(M,t)\right] + f(M,t). \tag{9}$$

Полученное уравнение является уравнением в частных производных параболического типа, являющееся линейным уравнением с переменными коэффициентами.

Выведем уравнение распределения потенциала в теле имеющего, нелинейное сопротивление. Для этого заменим в уравнении (1) $\sigma(M)$ на $\sigma(\varphi)$ и преобразуем к виду:

$$\Delta q = -\sigma(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Delta S\Delta t \tag{10}$$

Дальнейший вывод уравнения распределения потенциала в теле с нелинейным сопротивлением подобен выводу уравнения для тела с линейным сопротивлением, приведенный выше(2)-(8). После ряда преобразований получим уравнение:

$$c(M)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = div\left[\sigma(\varphi)grad\varphi(M,t)\right] + f(M,t). \tag{11}$$

Полученное уравнение является квазилинейным относительно φ.

Решая уравнение (9) или (11) получим функцию распределения потенциала в теле. Для нахождения распределения тока воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме:

$$j(M,t) = \sigma(M)E(M,t) = \sigma(M)grad\varphi(M,t). \tag{12}$$

Применение закона Ома возможно при соблюдении условий квазистационарности [4]

Проверка полученного уравнения.

Для определения правильности выведенного уравнения найдем распределение тока, неизменного во времени, в проводнике, имеющем линейное сопротивление и не имеющего внутренних источников потенциалов.

Запишем в математической форме условия:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0;\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;\sigma(M)=const;f(M,t)=0; \tag{13}$$

Переписав уравнение (9) и подставив в него условия (13) получим:

$$0=div[\sigma(M)grad\varphi(M,t)] \tag{14}$$

Раскроем скобки:

$$0=\frac{\partial\sigma(M)}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sigma(M)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Преобразуем уравнение (15). На основе правила дифференцирования первое слагаемое равно 0. Разделим обе части уравнения на $\sigma(M)$. Получим:

$$0=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{16}$$

Решим полученное уравнение (16):

$$\varphi(x)=C_1x+C_2, \tag{17}$$

где C_1-потенциал в начальной точке;

C_2-напряженность электрического поля.

Постоянные интегрирования находятся из краевых условий. Уравнение (17) подставим в закон Ома (12) и получим:

$$j=\sigma C_1. \tag{18}$$

Полученное уравнение соответствует закону Ома для тока, протекающего в линейном проводнике, что подтверждает правильность разработанной модели распределения тока в теле.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Конвективные процессы в невесомости / В.И. Полежаев, М.С. Белло, Н.А. Верезуб и др. -М.:Наука,1991.-240с.
2. Яровой Г.П. Осипов М.Н. Некоторые аспекты естественнонаучных проблем функционирования проблем функционирования космических аппаратов.//Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент,1998,№1с.45-33.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. –М.:Наука, 1986. -544с.
4. Суханов А.Д. Фундаментальный курс физики: т1,т2.-М.:Агар.1996.