УДК 621.37/39

НАХОЖДЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ ЗАРЯДОВОЙ ПЛОТНОСТИ ОТ ОДНОПОТЕНЦИАЛЬНОЙ N- ПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

Помельников Р.А., Назимов М.А.

Рассматриваемый метод имеет ряд преимуществ перед другими методами (конечных разностей, конечных элементов) это возможность нахождения значения поля в заданных точках или областях пространства, а также от систем с открытыми границами без каких либо предположений относительно распределения потенциала вдоль этих границ. при этом он имеет недостаток при нахождении поля на поверхности заряженной области необходимо обходить сингулярность эллиптического интеграла.

Рассмотрим заряженный проводник, заряды в котором являются избыточными т.е. приданным проводнику извне, а не индуцировано внешним полем в которое внесен проводник. Данные заряды являются источниками электростатического поля.

Метод основывается на факте, что в статическом случае поле является неустойчивым и выталкивается из любой области занятой проводником. В пределах макроскопической электродинамики можно принять, что заряды распределяются по поверхности проводника таким образом, что все эти поверхности эквипотенциальны (в случае уединенных проводников). Можно считать, что эти заряды являются источниками электростатического распределения потенциала в пространстве, окружающим электроды, в том числе и потенциалы самих электродов. /1/

При замене потенциалов электродов этими поверхностными распределениями зарядов на электродах, дальнейший расчет сводится к алгебраическому суммированию потенциала в интересующей точке пространства по всем поверхностям на основе принципа суперпозиции:

$$u\left(\vec{R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{d\left[q\left(\vec{R}_S\right)\right]}{\left|\vec{R}-\vec{R}_S\right|} \qquad (1)$$

Пологая, что заряд распределен непрерывно по элементу и плотность заряда однозначно определена радиусом- вектором малого элемента, расположенного в месте нахождения заряда, получим:

$$d[q(\mathbf{R}_s)]=\rho(\mathbf{R}_s)dV=\sigma(\mathbf{R}_s)ds\ , \qquad (2)$$

где dV,ds- элементы объема и поверхности соответственно.

Расстояние между элементом заряда и точкой наблюдения в декартовых координатах равно:

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_S\right|=\sqrt{\left(x-x_S\right)^2+\left(y-y_S\right)^2+\left(z-z_S\right)^2}\ , \qquad (3)$$

где x_s, y_s, z_s- координаты заряда;

x, y, z- текущие координаты точки, в которой находится значение поля.

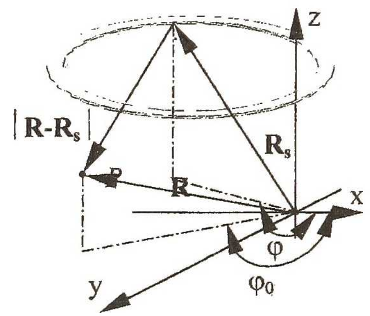

Рисунок 1 Потенциал электростатического поля в точке P от элемента заряженной поверхности.

Данное представление подходит при нахождении потенциала поля на плоскости.

При нахождении потенциала поля в трехмерных координатах для аксиально-симметричной системы перейдем к цилиндрической системе координат:

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_S\right|=\sqrt{r^2+r_S^2-2rr_S\cos(\alpha-\alpha_S)+(z-z_S)^2}. \qquad (4)$$

Подставляя в выражение (1) получим следующее выражение для аксиально-симметричного распределения потенциала u(r,z), созданного распределенным пространственным зарядом $\rho(r_s,z_s)$:

$$u\left(\vec{R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{r_{S1}}^{R}\int\limits_{z_{S1}}^{Z}\frac{\rho\left(r_S,z_S\right)\cdot r_S\cdot dr_S dz_S d\alpha}{\left|\vec{R}-\vec{R}_S\right|}. \qquad (5)$$

В случае нахождения потенциала электрического поля от электрода, изображенного на рис.1. Интеграл по всему объему электрода можно заменить на сумму интегралов по боковым граням электрода:

$$u\left(\vec{R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{z_{S1}}^{Z}\frac{\rho\left(r_S,z_S\right)\cdot r_S\cdot dz_S d\alpha}{\left|\vec{R}-\vec{R}_S\right|}+\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{r_{S1}}^{R}\frac{\rho\left(r_S,z_S\right)\cdot r_S\cdot dr_S d\alpha}{\left|\vec{R}-\vec{R}_S\right|}\right]. \qquad (6)$$

При интегрировании по α_s получается эллиптический интеграл второго рода, который имеет только численное решение, поэтому имеет смысл проинтегрировать вначале по z_s или r_s соответственно, а потом по α_s.

Первый интеграл можно привести к виду:

$$\int \frac{dz_s}{\sqrt{a_z z_s^{\;2} + b_z z_s + c_z}}, \tag{8}$$

где $a_z=1$; $b_z=-2z$; $c_z = z^2 + r^2 + r_S^2 - 2rr_S \cos\alpha$.

Для решения интеграла применим первую подстановку Эйлера /2/. Получим следующее решение:

$$\iint \frac{dz_S d\alpha_s}{\sqrt{Z}} = \int ln\left(2\sqrt{Z} + 2z_s + b\right) d\alpha_s, \tag{9}$$

где $Z = z_S^2 + bz_s + c$.

При интегрировании по r_s получим /2/:

$$\iint \frac{r_s dr_s d\alpha_s}{\sqrt{R}} = \int \frac{\sqrt{R} d\alpha_s}{a} - \frac{b}{2a} \iint \frac{dr_s d\alpha_s}{\sqrt{R}}, \tag{10}$$

где $R = r_s^{\;2} + b_r r_s + c_r$.

Заменив переменную z_s на r_s и коэффициенты на a_z, b_z и c_z на коэффициенты a_r, b_r и c_r соответственно второй интеграл в выражении (10) приводится к виду интеграла (8) с коэффициентами $a_r=1$, $b_r=-2\cdot r\cdot\cos(\alpha)$, $c_r=r^2+(z-z_S)^2$.

Рассматривая решение интеграла (8) и (10) при интегрировании по переменной r_s или z_s можно принять, что мы решаем интеграл с параметром, где параметрами будут выступать оставшиеся переменные.

Примем, что $\rho(r_s,z_s)$ является постоянной величиной т.е. $\rho(r_s,z_s,\alpha_s)=C$.

При интегрировании $u_{z\alpha}$ по z_s получим выражение:

$$u_{z\alpha}\left(\vec{R}\right) = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \int_{C_z}^{C_Z} \frac{r_S \cdot dr_S dz_S d\alpha_s}{\sqrt{\left|\vec{R} - \vec{R}_S\right|}} == -\frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \times$$

$$\times \left[A ln(2) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} \; \Big|_{C_z}^{C_Z} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} ln\left(z_S - z + \sqrt{\left|\vec{R} - \vec{R}_S\right|} \right) dA \Bigg|_{C_z}^{C_Z} \right], \tag{11}$$

$$u_{r\alpha}\left(\vec{R}\right) = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[-\sqrt{\left|\vec{R} - \vec{R}_S\right|} \Bigg|_{C_r}^{C_R} + 2r\, cos(\alpha) \int_{C_r}^{C_R} \frac{dr_S}{\sqrt{\left|\vec{R} - \vec{R}_S\right|}} \right] dA =$$

$$= +\frac{C}{8\pi\varepsilon_0} \left[2\sqrt{\tau} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{4rr_S}{\tau} sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}\, d\left(\frac{A}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2r \left[ln 2\, sin\, A \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} cos\, A\, ln\left(r_S - r\cos A + \sqrt{\left|\vec{R} - \vec{R}_S\right|} \right) dA \right] \right] \Bigg|_{C_r}^{C_R}, \tag{12}$$

где $\tau=r^2+r_s^2+(z-z_s)^2$; $A=\alpha-\alpha_s$.

Суммирование производится с учетом экранирования поверхностей друг другом.

$$u=\begin{cases} u_{r\alpha}+u_{z\alpha}, & при \ |z-z_s|>\Delta z_s, |r-r_s|>\Delta r_s \\ u_{z\alpha}, & при \ |z-z_s|\le\Delta z_s \\ u_{r\alpha}, & при \ |r-r_s|\le\Delta r_s \end{cases}, \qquad (13)$$

где Δz_s, Δr_s- толщина и ширина кольца элемента конструкции.

Для нахождения значения напряженности поля в необходимой точке воспользуемся выражением $\vec{E}=grad\ u$.

Данные интегралы расходятся в точках $z=z_s$, $r_s^2+r^2=2r_sr$ $(при\ \alpha-\alpha_s=0)$. Данный результат соответствует эффекту острия так как мы приняли, что заряды распределены в дельта- слое непрерывно. Решение интегралов в данных случаях возможно только в смысле главного значения Коши.

Список использованных источников

1. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. - М:Мир, 1990.-639с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М: Физ.-мат. литература, 1960.-748с.

УДК 621.37/39

ПРИБОР ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВА ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

Занин А.Н., Пияков И.В.

В настоящее время в различных областях науки и техники все более широко начинают применяться приборы для определения состава газов. Большинство масс-спектрометров обладают относительно большими массой и габаритами. В связи с этим появился интерес к времяпролетным масс-спектрометрам. На рисунке 1 приведена схема одного из вариантов.

Принцип работы заключается в следующем. В начальный момент времени $t=0$ происходит ионизация газа, находящегося в пространстве L_{13} между выталкивающей пластиной и заземляющей сеткой 1. Ионизация длится в течение времени τ. Одновременно на выталкивающую пластину подается импульс длительностью T, такой при котором поле в пространстве L_{13} описывается выражением [1]:

$$E(t)=\begin{cases} E_0, 0\le t\le t_0 \\ \dfrac{m_0}{q}\times\dfrac{TL_{12}}{t(T-t)^2}, t_0\le t\le T \end{cases}, \qquad (1)$$