

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ С ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ

Курушин М. И., Курушин А. М.

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Опыт доводки на ресурс и надежность турбовинтового двигателя показал, что динамика редуктора является составной частью общей динамики двигателя, а редуктор является мощным генератором его возбуждения. Так экспериментально было установлено, что при зубной частоте от солнечного колеса 4770 Гц ломались лопатки третьей ступени компрессора на частоте собственных колебаний 2600 Гц по третьей крутильной форме. Конечно, математическая модель упругой системы редуктора очень сложная и выяснить на ней влияние всевозможных параметров на уровень и характер колебаний затруднительно. Вот для того, чтобы выяснить возможность проявления параметрической неустойчивости в упругой, в том числе многомассовой, системе с одной зубчатой передачей и было проведено наше исследование. В процессе работы зубчатые колеса совершают сложные изгибно-крутильные колебания и параметрические колебания на податливостях зубьев, валов и опор совместно с присоединенными деталями механизмов и изделий. При исследовании делаются следующие упрощающие допущения: рассматриваются только крутильные колебания упругих систем с одной зубчатой парой; изгибные колебания валов не учитываются; опоры - абсолютно жесткие без сопротивления вращению шарниры; крутящий момент на ведущем элементе имеет постоянное значение; зубчатые колеса по точности идеальные (без погрешностей); жесткости пар зубьев в процессе зацепления имеют постоянное значение; при пересопряжении зубьев жесткость в зацеплении изменяется скачкообразно по закону прямоугольного синуса; коэффициент перекрытия в зацеплении

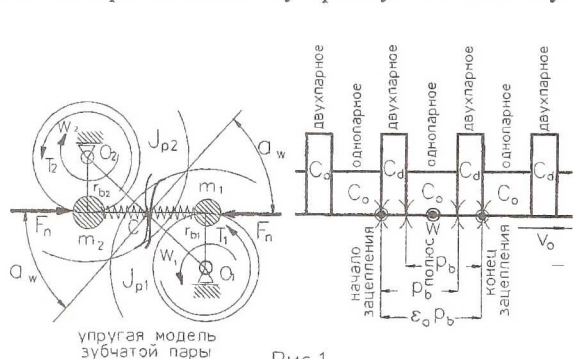


Рис 1

$1 < \epsilon_\alpha < 2$. Крутильные колебания зубчатых колес относительно положения статического равновесия эквивалентны продольным колебаниям масс зубчатых колес, приведенных к основным окружностям и связанных между

собой жесткостью зубьев-рис.1. На рисунке: J_{P1}, J_{P2} - массовые полярные моменты инерции зубчатых колес; T_2 - крутящий момент на колесе; F_n - нормальное усилие в зацеплении; C - жесткость зубьев в зацеплении; C_o, C_d - жесткости пары зубьев соответственно при однопарном и двухпарном зацеплениях; α_w - угол зацепления; ω_1, ω_2 - угловые скорости вращения соответственно шестерни и колеса; r_{b1}, r_{b2} - радиусы основных окружностей соответственно шестерни и колеса; p_b - основной шаг зацепления; ϵ_α - p_b - длина активной части линии зацепления; $m_1 = J_{P1}/r_{b1}^2, m_2 = J_{P2}/r_{b2}^2$ - соответственно массы шестерни и колеса, приведенные к линии зацепления.

Из теории эвольвентных зацеплений следует: $V_o = r_{b1} \cdot \omega_1$ - скорость перемещения точки контакта профилей зубьев вдоль линии зацепления; $T_z = \epsilon_\alpha \cdot p_b / V_o = (60 \cdot \epsilon_\alpha) / (n_1 \cdot z_1) = (60 \cdot \epsilon_\alpha) / (n_2 \cdot z_2)$ - период зацепления пары зубьев; $t_o = (2 - \epsilon_\alpha) \cdot T_z$ - время однопарного зацепления; $t_d = (\epsilon_\alpha - 1) \cdot T_z$ - время двухпарного зацепления; $f_z = (n_1 \cdot z_1) / 60 = (n_2 \cdot z_2) / 60$ - частота зацепления зубьев (зубная частота); $p_z = 2 \cdot \pi \cdot f_z$ - круговая частота зацепления. Для проверки правильности принятой методики расчета была исследована одномассовая упругая модель согласно рис.2.- приведенная масса шестерни m_1 колеблется на переменной жесткости зубьев относительно массы колеса, принятой бесконечно большой. Дифференциальное уравнение вибраций при смене жесткостей имеет вид-

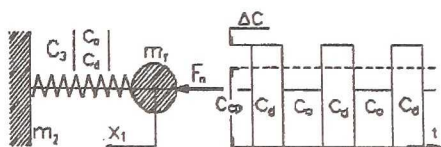
$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{d t^2} = F_n - C_z \left| \frac{C_o}{C_d} \right| \cdot x_1 - \lambda_x \cdot \frac{d x_1}{d t}$$

Здесь λ_x - коэффициент вязкого (пропорционального скорости) сопротивления движению. Если принять среднее значение жесткости зубьев за период их зацепления $C_{cp} = (2 - \epsilon_\alpha) \cdot C_o + (\epsilon_\alpha - 1) \cdot C_d$, а амплитуду переменной жесткости $\Delta C = (C_d - C_o) / 2$, то

уравнение движения можно свести к уравнению Мате [1].

$$\frac{d^2 x_1}{d \tau^2} + p_{cp}^2 \cdot \left[1 \pm 2 \cdot \frac{\Delta C}{C_{cp}} \cdot \cos(2 \cdot \tau) \right] = 0.$$

Тогда области резонансов и параметрической неустойчивости можно определять по диаграмме Айнса-Стретта- рис.3.



одномассовая упругая модель

Рис.2

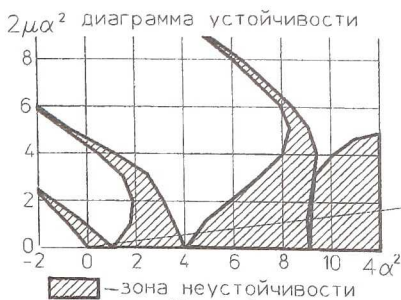


Рис.3



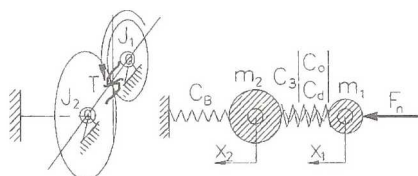
Рис.4

Для случая: $C_0=320000$ кг/см; $C_d=1,8 \cdot C_0=576000$ кг/см; $C_{cp}=448000$ кг/см; $z_1=35$; $\epsilon_\alpha=1,5$; $b_\omega=2$ см; $m_1=0,01377$ кг·см/с²; $\lambda_\omega=0,5$ кг·с/см; $F_n=2000$ кг; представлен график численного расчета резонансных оборотов и областей параметрической неустойчивости-рис. 4. Области неустойчивости при не очень больших перепадах жесткости

располагаются вблизи значений оборотов $n=n_{cz1} \cdot 2/k$ ($k=1,2,3,\dots$), где $n_{cz1} = (30 / \pi \cdot z_1) \cdot \sqrt{C_{cp}/m_1} = 1556,3$ об/мин- частота вращения шестерни, соответствующая собственной частоте колебаний упругой системы. Так для самого простейшего случая одномассовой системы (шестерня с массивным зубчатым колесом без учета податливости опор под действием постоянного крутящего момента) с ступенчато изменяющейся жесткостью зацепления по закону прямоугольного синуса полностью подтверждается диаграмма Айнса-Стретта: наряду с полуторными гармониками параметрической неустойчивости самая широкая по оборотам область неустойчи-

вости находится в районе удвоенного значения собственной частоты упругой системы.

Далее исследовалась двухмассовая упругая система-шестерня и колесо колеблется относительно положения статического равновесия на жесткостях зубьев и вала колеса-рис.5. При этом кру-



двухмассовая упругая модель

Рис.5

тильная жесткость вала- C_ϕ приводится к жесткости поступательного перемещения приведенной массы колеса по соотношению $C_B=C_\phi/\gamma^2_{b2}$. Дифференциальные уравнения движения упругой системы:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_n + C_z \left| \frac{C_0}{C_d} \right| \cdot (x_2 - x_1) - \lambda_x \cdot \frac{d x_1}{dt} - \text{шестерня;}$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = C_z \left| \frac{C_0}{C_d} \right| \cdot (x_1 - x_2) - C_B \cdot x_2 - \lambda_x \cdot \frac{d x_2}{dt} - \text{колесо.}$$

Для случая: $C_0=320000$ кг/см; $C_d=1,8 \cdot C_0=576000$ кг/см; $C_{cp}=448000$ кг/см; $C_B=C_0/2=160000$ кг/см $z_1=35$; $z_2=70$; $\epsilon_\alpha=1,5$; $b_\omega=2$ см; $m_1=0,01377$ кг·см/с²; $m_2=4 \cdot m_1=0,05508$ кг·см/с²; $\lambda_\omega=0,5$ кг·с/см; $F_n=2000$ кг;

на рис.6 представлен график численного расчета резонансных оборотов и областей параметрической неустойчивости для двухмассовой системы.



Рис.6

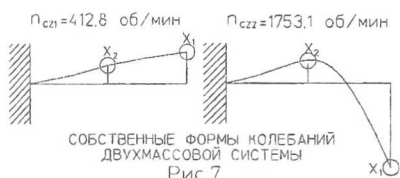


Рис.7

широкий диапазон неустойчивости находится в районе удвоенного значения оборотов, соответствующих собственной частоте по второй форме колебаний, когда зубчатые колеса колеблются навстречу друг другу.

Далее исследовалась трехмассовая упругая система- она такая же,



ТРЕХМАССОВАЯ УПРУГАЯ МОДЕЛЬ
Рис.8

где J_{p3} -массовый полярный момент инерции ротора электродвигателя, а $C_{\varphi 3}$ -крутильная жесткость вала его-рис.8 Дифференциальные уравнения движения элементов упругой системы:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = C_3 \cdot x_3 + C_z \left| \frac{C_o}{C_d} \right| \cdot (x_2 - x_1) - C_3 \cdot x_1 - \lambda_x \cdot \frac{dx_1}{dt} \quad \text{шестерня;}$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = C_z \left| \frac{C_o}{C_d} \right| \cdot (x_1 - x_2) - C_B \cdot x_2 - \lambda_x \cdot \frac{dx_2}{dt} \quad \text{колесо;}$$

Резонансные обороты определялись по частотному уравнению $((C_{cp} + C_B)/m_2 - p^2) \cdot (C_{cp}/m_1 - p^2) - C_{cp}^2/(m_1 \cdot m_2) = 0$ и по соотношению, связывающему круговую собственную частоту- p_i с частотой вращения шестерни $n_{cz1} = (30 \cdot p_i) / (\pi \cdot z_1)$. Было найдено: $n_{cz1} = 412,8$ об/мин и $n_{cz2} = 1753,1$ об/мин, а соответствующие им собственные формы колебаний представлены на рис. 7.

Обороты шестерни с повышенными нагрузками и неустойчивостью (об/мин): 145; 175; 195; 205...215; 290; 315; 340; 345...350; 385; 415; 430; 502; 585; 702; 877; 1170; 1753; 2630...3506. Самый

как и двухмассовая, только к шестерне присоединена приведенная масса электродвигателя- $m_3 = J_{p3} / r_{b1}^2$ на приведенной жесткости вала- $C_3 = C_{\varphi 3} / r_{b1}^2$,

$$m_3 \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} = F_n - C_3 \cdot (x_1 - x_3) - \lambda_x \cdot \frac{dx_3}{dt} \quad \text{— ротор электродвигателя.}$$

Частотное уравнение при среднем значении жесткости в зацепления зубьев-
 $C_{cp}: ((C_z+C_B)/m_2-p^2) \cdot ((C_z+C_3)/m_3-p^2) \cdot (C_3/m_3-p^2) - ((C_z+C_B)/m_2-p^2) \cdot (C_3^2/(m_1 m_3)) - (C_z^2/(m_1 m_2)) \cdot ((C_3/m_3)-p^2) = 0.$

Для таких же исходных данных, как и в случае двухмассовой системы, с добавлением приведенной массы электродвигателя $m_3=10 \cdot m_1=0,1377$ кг·см/ c^2 и приведенной жесткости вала шестерни $C_3=C_0/5=64000$ кг/см определены значения оборотов, соответствующих собственным частотам колебаний упругой системы: $n_{cz1}=146$ об/мин; $n_{cz2}=477,5$ об/мин; $n_{cz3}=1940,1$ об/мин; а результаты расчетов амплитуд колебаний зубчатой пары и собственные формы колебаний упругой системы приведены соответственно на рис.9 и рис.10. Обороты шестерни



Рис. 9

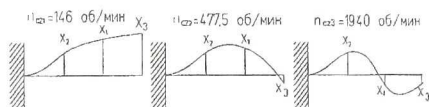


Рис. 10

с повышенными значениями усилий и неустойчивостью (об/мин): 450...590; 690...695; 855...1025; 1135...1185; 1605...1900; 3190...3820. Самый широкий диапазон неустойчивости также как и в случае двухмассовой упругой системы находится в районе удвоенного значения оборотов, соответствующих собственной частоте по третьей форме, когда зубчатые колеса колеблются навстречу друг другу.

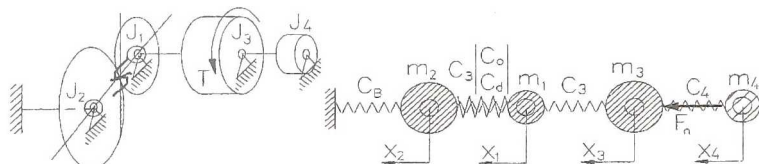


Рис. 11

И, наконец, нами рассмотрен случай четырехмассовой упругой системы с одной зубчатой парой. Упругая модель ее показана на рис.11-к трехмассовой системе с электродвигателем была добавлена еще одна свободная масса на которую не действуют внешние силы-

$m_4 = m_1/10 = 0.001377 \text{ кг}\cdot\text{см}/\text{с}^2$ и которая присоединена к массе электродвигателя приведенной жесткостью- $C_4 = C_3 = 64000 \text{ кг}/\text{см}$. Остальные расчетные данные как и для трехмассовой системы.

Частотное уравнение при среднем значении жесткости зубьев в зацеплении- C_{cp} имеет вид: $((C_z + C_B)/m_2 \cdot p^2) \cdot ((C_z + C_3)/m_1 \cdot p^2) \cdot ((C_3 + C_4)/m_3 \cdot p^2) \cdot (C_4/m_4 \cdot p^2) - ((C_z + C_B)/m_2 \cdot p^2) \cdot ((C_z + C_3)/m_1 \cdot p^2) \cdot (C_2^2/(m_3 \cdot m_4)) - ((C_z + C_B) \cdot p^2) \cdot (C_4/m_4 \cdot p^2) \cdot (C_3^2/(m_1 \cdot m_3)) - ((C_3 + C_4)/m_3 \cdot p^2) \cdot (C_4/m_4 \cdot p^2) \cdot (C_2^2/(m_1 \cdot m_2)) + (C_2^2 \cdot C_4^2/(m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4)) = 0$. По нему определены значения оборотов, соответствующих собственным частотам колебаний упругой системы: $n_{cz1} = 146 \text{ об}/\text{мин}$; $n_{cz2} = 501,4 \text{ об}/\text{мин}$; $n_{cz3} = 1830 \text{ об}/\text{мин}$; $n_{cz4} = 1870 \text{ об}/\text{мин}$; а результаты расчетов амплитуд колебаний зубчатой пары и собственные формы колебаний упругой системы приведены соответственно на рис. 12 и рис. 13.

Обороты с повышенными усилиями и неустойчивостью (об/мин): 140...145; 165; 280; 305; 330; 360...365; 450...455; 460...595; 600...610; 615...620; 725...895; 900...930; 935...985; 1185...1235; 1740...1995; 3360...3965. Опять следует, что и в этом сложном случае, когда в многомассовой системе имеется



Рис 12



Рис 13

одна зубчатая пара, наблюдается много режимов неустойчивости по оборотам. И опять самый широкий диапазон неустойчивости находится в районе удвоенного значения оборотов, соответствующих собственным частотам по третьей и четвертой формам, когда зубчатые колеса колеблются навстречу друг другу.

Таким образом, проведенные исследования позволяют сделать следующие предварительные выводы: 1. Во время пересопряжения зубьев зубчатой передачи в сущности происходит 'удар' и упругая система

колеблется по всем своим формам и частотам. 2. В любой упругой системе даже с одной зубчатой передачей может быть параметрическая неустойчивость. 3. Не все собственные формы сильно резонируют ; сильно резонируют формы с резким изменением своих параметров , когда зубчатые колеса колеблются навстречу друг другу . 4. Очень широкий диапазон неустойчивости оказывается в районе оборотов в два раза больше чем собственные обороты по зубной частоте по невыгодным собственным формам , когда колеса колеблются навстречу друг другу. 5. Часто бывает, что шестерня и колесо колеблются с разными частотами и по разным формам . Поэтому при торсиографировании и тензометрировании валов в изделиях трудно обнаружить источники возбуждения колебаний .

ЗАМЕЧАНИЯ К РАСЧЕТУ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ГОСТУ

Курушин М. И. , Курушин А. М.

Самарский государственный аэрокосмический университет , г.Самара

При определении расчетной нагрузки и контактных напряжений в ГОСТе и во всей учебной литературе по курсу "Детали машин" вводится коэффициент $Z\varepsilon$ якобы учитывающий "суммарную длину контактных линий". При этом, в прямозубых передачах этот коэффициент - $Z\varepsilon = \sqrt{(4 - \varepsilon_\alpha)/3}$, а в косозубых - $Z\varepsilon = \sqrt{1/\varepsilon_\alpha}$, где ε_α - коэффициент торцевого перекрытия. Необходимо отметить, что касается косозубой передачи, то этот коэффициент действительно учитывает суммарную длину контактных линий одновременно находящихся в контакте зубьев. А вот что касается прямозубых передач ,то здесь есть серьезные возражения. Во-первых, расчет на контактную прочность ведется, как правило, в полюсе зацепления, когда в контакте находится, естественно, одна пара зубьев и длина контактных линий равна минимальной ширине зубчатого венца и трактовать ее как "суммарную длину контактных линий" по аналогии с косозубыми колесами просто неприлично. Кроме того еще и утверждается, что этот коэффициент найден экспериментально. Действительно, коэффициент перекрытия ε_α существенно влияет на нагрузку и напряжения, но природа его совершенно другая, чем это трактуется. На самом деле, этот коэффициент выводится теоретически и является неудачным обобщением исследования параметрических колебаний одиночной зубчатой пары при очень больших оборотах, когда частота зацепле-