

тивности, необходимо ввести определенную величину. Такой величиной может служить функция цели производства (или свертка функций). Функция цели производства – это аналитическая зависимость какого-либо показателя производства от характеристик продукции и параметров, постоянных и переменных, структуры производства и процессов, происходящих в нем. Задача управления состоит в том чтобы, так изменять эти параметры, чтобы функция цели имела экстремальное значение. В промышленном производстве наиболее распространенными функциями цели являются себестоимость продукции и продолжительность производственного цикла продукции. Это не исключает формирование и других функций цели. В реальной практике необходимо учитывать сразу несколько функций цели производства, тогда используется свертка функций целей, т.е. такая функция, в которой с помощью переменных коэффициентов можно регулировать частное значение той или иной цели (задачи) производства. Создание этих функций цели (желательно в аналитическом виде) и является залогом успешного функционирования производства.

Приведем перечень всех категорий производства рассмотренных выше.

ЧЕЛОВЕЧЕСКАЯ ПОТРЕБНОСТЬ, ПРОДУКЦИЯ, ОТХОДЫ ПРОИЗВОДСТВА, ПРОИЗВОДСТВО, ЭЛЕМЕНТ ПРОИЗВОДСТВА, ПОТОК (КОМПОНЕНТА), РАБОЧЕЕ МЕСТО, ПРОЦЕСС, ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА, УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВОМ, ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА.

## **РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАВОДОРАЖИВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ**

Фадеев А.Ю., Плотников А.Н., Богданович В.И.,  
Проничев Н.Д., Смирнов Г.В.

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Импульсная электрохимическая обработка (ЭХО) находит применение как окончательный метод формообразования тракторных поверхностей малоразмерных лопаток компрессора. Одним из существенных недостатков этого метода является наводораживание поверхности, снижающее эксплуатационные свойства деталей. Устранение наводораживания возможно лишь на основе изучения факторов, определяющих механизм и установления его основных закономерностей этого процесса.

В работе представлена математическая модель определения наводораживания поверхностного слоя при импульсной ЭХО титановых сплавов.

Механизм наводораживания поверхностного слоя детали при ЭХО на постоянном токе была рассмотрена в работе [1]. Для импульсной ЭХО характерно большое число импульсов  $\sim 10^4 - 10^5$  равной интенсивности. Причем, в период паузы происходит дополнительное наводораживание обрабатываемой поверхности при ее фиксированном положении. Малая длительность импульсов  $\tau \sim 10^{-3} \dots 10^{-2}$  в сочетании с малой скоростью диффузии позволяют представить данный процесс как последовательность мгновенных импульсов. При этом можно предположить, что удельное количество водорода, образовавшегося в результате растворения слоя постоянной толщины  $h$ , мгновенно выделиться на вновь образованной поверхности.

Рассмотрим воздействие единичного импульса интенсивности  $v$  на процесс насыщения поверхности водородом.

Концентрация свободного водорода в этом случае может быть определена на основе решения уравнения:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - AC + v\delta(z,t) \quad (1)$$

$$C(z,0)=0, z>0, t>0$$

С граничным условием

$$\left. \frac{\partial C(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

где  $\delta(z,t)$  - импульсная функция [1].

Уравнение вида (1) подстановкой  $C=ue^{-At}$  приводится к обратному параболическому виду [2]. Следовательно,  $u(z,t)$  соответствует решению краевой задачи теплопроводности II рода для полупрямой с импульсным источником  $v$  на конце [3]

$$u(z,t) = \frac{v \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{\pi Dt}} \quad (3)$$

Тогда находим

$$C'(z,t) = G_i(z,t) = \frac{v \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt} - At\right)}{\sqrt{\pi Dt}} \quad (4)$$

где  $G_i$  - функция поверхностного источника - решение уравнения (1) для полупрямой. Концентрация связанного водорода при этом составит

$$C(x) = A \int_0^{\infty} G_i(z, t) dt = v \sqrt{\frac{A}{D}} \exp\left(-z \sqrt{\frac{A}{D}}\right) \quad (5)$$

При прохождении следующего импульса через время  $T$  предыдущий источник исчезает вместе с растворенным слоем, оставив следы

$$S_I = G_i(z+h, t) = \frac{v \exp\left(-\frac{(z+h)^2}{4Dt} - At\right)}{\sqrt{\pi Dt}} \quad (6)$$

$$S_{II} = A \int_0^T G_i(z+h, t) dt = \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{A}{D}} \exp\left(-(z+h) \sqrt{\frac{A}{D}}\right) \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{z+h}{2\sqrt{DT}} - \sqrt{AT}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left((z+h) \sqrt{\frac{A}{D}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z+h}{2\sqrt{DT}} + \sqrt{AT}\right) \right\} \quad (7)$$

где  $S_I(z)$  - концентрация свободного водорода от предыдущего импульса на момент последующего,  $S_{II}(z)$  - концентрация связанного.

Очевидно, что  $S_I(z)$  является начальным условием II краевой задачи с уравнением (2) (с нулевой правой частью). Следовательно, поле концентрации будет иметь вид [3]

$$F_I(z, t) = \int_0^{\infty} S_I(\xi) \frac{\exp\left(-\frac{(z-\xi)^2}{4DT} - At\right) + \exp\left(-\frac{(z+\xi)^2}{4DT} - At\right)}{2\sqrt{\pi Dt}} d\xi \quad (8)$$

где  $F_I$  - "фантомный источник".

Концентрация связанного водорода после двух импульсов имеет вид:

$$C_x^{(II)} = S_I(z) + A \int_0^{\infty} [G_i(z, t) + F_I(z, t)] dt = \\ = v \sqrt{\frac{A}{D}} \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(-(z+h) \sqrt{\frac{A}{D}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z+h}{2\sqrt{DT}} - \sqrt{AT}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left((z+h) \sqrt{\frac{A}{D}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z+h}{2\sqrt{DT}} + \sqrt{AT}\right) + \right. \\ \left. \left\{ e^{-z \sqrt{\frac{A}{D}}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left[ e^{-h \sqrt{\frac{A}{D}}} \operatorname{erfc}\left(\frac{h}{2\sqrt{DT}} - \sqrt{AT}\right) + e^{h \sqrt{\frac{A}{D}}} \operatorname{erfc}\left(\frac{h}{2\sqrt{DT}} + \sqrt{AT}\right) \right] \right] \right\} \right\} \quad (9)$$

Продолжая вышеизложенную схему рассуждений на последовательность  $N$  импульсов и принимая  $N \rightarrow \infty$  получаем искомые концентрации в виде рядов

$$C'(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z, t), \text{ где} \quad (10)$$

$$F_0(z, t) = G_I(z, t) \quad (11)$$

$$F_{k+1}(z, t) =$$

$$= \int_0^{\infty} F_k(\xi + h, T) \frac{\exp\left(-\frac{(z-\xi)^2}{4DT} - At\right) + \exp\left(-\frac{(z+\xi)^2}{4DT} - At\right)}{2\sqrt{\pi Dt}} d\xi \quad (12)$$

Для определения концентрации связанного водорода, накопленного в процессе обработки в сечении  $z \geq 0$ , нужно просуммировать воздействия источников с координатами  $z + kh$  и длительностью  $T$ ,  $k \geq 1$ . Причем, как показано выше, каждый из источников можно представить в виде суммы  $F_n$ ,  $h \geq 0$

$$C_x(z) = A \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z + kh, t) dt \quad (13)$$

Полная концентрация водорода в поверхностном слое соответствующая экспериментальной кривой будет иметь вид:

$$C_S(z) = C_H + C_x(z) + A \int_0^{\infty} C'(z, t) dt \quad (14)$$

Для определения параметра  $v$  используем схему рассуждений по аналогии со стационарной задачей [1] получаем следующее соотношение

$$v = \alpha \left[ (C_x + C_H)h + \int_0^n [C_x(\xi) + C'(\xi, T)] d\xi \right] \quad (15)$$

где  $\alpha$  - коэффициент массообмена ( $0 < \alpha \leq 1$ ).

Для дальнейших вычислений находим сумму ряда

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z + h, T) \quad (16)$$

При вычислении  $V(z)$  сумму  $\sum_{k=1}^{\infty}$  оценим величиной  $\int_0^{\infty} dk$ . Погрешность

такой аппроксимации невелика, т.к.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{a}{x} - bx\right)}{\sqrt{x}} = 0$

После вычислений получаем  $V(z) = 2v \frac{\exp\left(-z \frac{h + \sqrt{h^2 + 4ADT^2}}{2DT}\right)}{\sqrt{h^2 + 4ADT^2}}$  (20)

Найди интегральные характеристики  $C'(z, t)$  и проведя необходимые математические вычисления, получаем полную концентрацию водорода:

$$C_S(z) = C_H + v \sqrt{\frac{A}{D}} \left(1 + \frac{2DT}{h\sqrt{h^2 + 4ADT^2}}\right) e^{-z\sqrt{\frac{A}{D}}} + C_x(z) \quad (21)$$

Для определения параметра  $v$  получаем соотношение

$$v = \frac{ah(C_1 + C_H)}{2\alpha h} \frac{1}{1 - \frac{2\alpha h}{\sqrt{h^2 + 4ADT^2}}} \quad (22)$$

В исследуемом диапазоне параметров

$$\max\{C_2(z)\} \ll v \frac{2\sqrt{ADT}}{h\sqrt{h^2 + 4ADT^2}}, \quad \sqrt{\frac{A}{D}} \ll \frac{2\sqrt{ADT}}{h\sqrt{h^2 + 4ADT^2}},$$

поэтому для практических расчетов можно использовать асимптоту (21)

$$\bar{C}_s(z) = C_H + \alpha(C_1 + C_H) \frac{\frac{2\sqrt{ADT}}{\sqrt{h^2 + 4ADT^2}} e^{-z\sqrt{\frac{A}{D}}}}{1 - \frac{2\alpha h}{\sqrt{h^2 + 4ADT^2}}} = \quad (23)$$

$$= C_H + \alpha(C_1 + C_H) \frac{\sigma e^{-z\sqrt{\frac{A}{D}}}}{\sqrt{1 + \sigma^2} - 2\alpha}$$

$$\sigma = \frac{2\sqrt{ADT}}{h} \quad (24)$$

При этом отношение  $\frac{C_S(z, T_1) - C_H}{C_S(z, T_2) - C_H}$  будет величиной постоянной, равной

$$\frac{\sigma_1 \left( \sqrt{1 + \sigma_2^2} - 2\alpha \right)}{\sigma_2 \left( \sqrt{1 + \sigma_1^2} - 2\alpha \right)} = \beta \quad (25)$$

Приняв  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma$ , получим

$$\beta = \frac{\sigma(\sqrt{2} - 2\alpha)}{\sqrt{1 + \sigma^2} - 2\alpha} \quad (26)$$

На основании математической модели была разработана методика определения наводороживания поверхностного слоя при импульсной ЭХО титановых сплавов, позволяющая определить количество водорода в поверхностном слое при различных режимах обработки и параметрах циклограмм.

Расчеты проводились по формуле (21). Неизвестные значения  $\alpha$ ,  $A$ ,  $C_1$  определялись с использованием предварительно снятой экспериментальной зависимости наводороживания.

Общее количество водорода, находящегося в поверхностном слое при снятии слоя толщиной  $dz$  можно определить, используя зависимость:

$$N(\sigma) = \int_0^{\infty} (C(z) - C_H) dz = \alpha \sqrt{\frac{A}{D}} (C_1 + C_H) \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2} - 2\alpha} \quad (27)$$

Из условия ограниченности  $\beta$ ,  $N$  при малых  $\sigma$  получаем  $\alpha < 1/2$ . Параметр  $\sigma^*$  можно определить следующим образом. Для данного материала строятся экспериментальные зависимости наводороживания по-

верхностного слоя при различных значениях  $\sigma = \frac{2\sqrt{ADT}}{h}$  (т.е. различных режимах обработки). По этим зависимостям вычисляются значения  $N(\sigma)$  и строится соответствующий график (рис. 1). Функция

$$\varphi(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2} - 2\alpha} \text{ имеет максимум в т. } \sigma^* = \frac{\sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha} \text{ величиной}$$

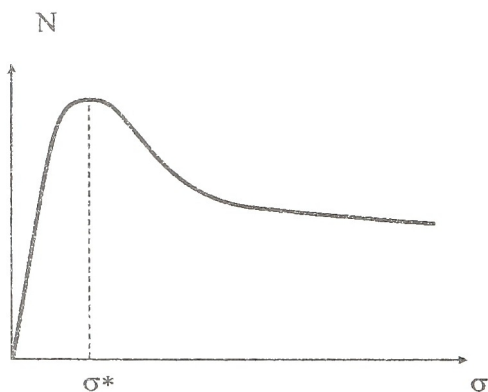


Рисунок 1

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\alpha^2}}$$

Определив экспериментальным путем  $\sigma^*$ , получим значение коэффициента массообмена

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sigma^{*2}}} \quad (28)$$

Значение кинематической константы  $A$  определяется следующим образом. Выбрав на экспериментальной кривой

(рис. 2)  $\bar{C}(z)$  характерную точку  $z^*$ , строим зависимость вида:

$$\psi(z) = \frac{C(z) - C_H}{C(z^*) - C_H} \quad (29)$$

Полагая справедливым закон (24) в левой части (29) можем записать

$$\exp\left[-(z - z^*)\sqrt{\frac{A}{D}}\right]$$

Логарифмируя полученное соотношение, после необходимых преобразований получаем

$$\sqrt{\frac{A}{D}} = \frac{1}{z^* - z} \ln\left(\frac{C(z) - C_H}{C(z^*) - C_H}\right),$$

откуда

$$A = D \left[ \frac{1}{z^* - z} \ln\left(\frac{C(z) - C_H}{C(z^*) - C_H}\right) \right]^2$$

Определим параметр  $C_1$ , используя соотношение (30). Вычислив  $N(\sigma)$  при заданном  $\sigma$ , находим

$$C_1 = \frac{N(\sigma)\sqrt{A}\left(\sqrt{1 + \sigma^2} - 2\alpha\right)}{\alpha\sigma\sqrt{D}} - C_H \quad (31)$$

Таким образом, построенная асимптотическая модель (23), (24) позволяет по экспериментальной зависимости определить значения параметров  $A$ ,  $\alpha$ ,  $C_1$ .

#### Список литературы

1. Проничев Н.Д. Разработка методологии и принципов проектирования технологии электрохимической обработки высоконагруженных деталей ГТД. Диссертация на соискание ученой степени д.т.н. Самара, СГАУ, 1997 г.
2. Рыкалин Н.Н. Тепловые основы сварки. Издат. академии наук СССР, Москва, 1947, 252 с.
3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М: Наука, 1972 г. - 736 с.

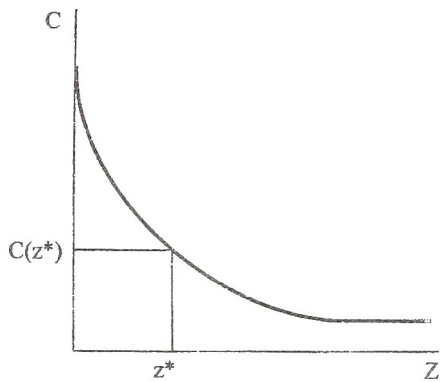


Рисунок 2