

# ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ГИСТЕРЕЗИСНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ НА ДИНАМИКУ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Шакиров Ф.М.

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Исследования энергодиссипационных характеристик конструкционных и эластомерных материалов [1...3] показывают, что свойство внутреннего трения многих из них, а в некоторых случаях и внешнего сухого трения может быть описано вязким демпфером, у которого коэффициент вязкого демпфирования  $d$  изменяется обратно пропорционально частоте возмущающего сигнала  $\omega$ .  $d = k/\omega$ , где  $k$  – коэффициент гистерезисного демпфирования [1]. Демпферная сила в этом случае пропорциональна относительному перемещению, но находится в фазе с относительной скоростью через демпфирующий элемент. А рассеянная за цикл колебаний энергия независима от частоты колебаний, в отличие от вязкого демпфирования, диссипированная энергия при котором линейно зависит от  $\omega$ .

Виброзащитное устройство (ВЗУ) в форме модели Пойнтинга–Томпсона ( иначе - Зенера) с гистерезисным типом демпфирования может служить для описания свойств находящихся в условиях гармонического вибровозмущения составных подвесок в форме комбинации элемента из сплошного материала (эластомерного или конструкционного) и расположенного последовательно ему упругого элемента.

Схема колебательной системы (КС) с гистерезисным демпфированием и ВЗУ в форме модели Пойнтинга–Томпсона дана на рис.1. Математическая модель предполагает допущения: масса основания значительно превосходит массу объекта и обе недеформруемые; объект является точечной массой, а КС имеет сосредоточенные параметры; элементы связи объекта с основанием обладают пренебрежимо малой массой; упругий и диссипативный элементы имеют линейные характеристики; колебания являются установившимися однонаправленными.

Движение КС описывается системами уравнений:

для кинематического возмущения –

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_2(t) + c_1[x_2(t) - x_1(t)] + c[x_2(t) - x_3(t)] &= 0 \\ \omega c[x_2(t) - x_3(t)] &= k[\dot{x}_3(t) - \dot{x}_1(t)] \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

для силового –

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_2(t) + c_1x_2(t) + c[x_2(t) - x_3(t)] &= F(t) \\ \omega c[x_2(t) - x_3(t)] &= k\dot{x}_3(t) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $m$  – масса защищаемого объекта;  $c$ ,  $c_1$  – соответственно, релаксаци-

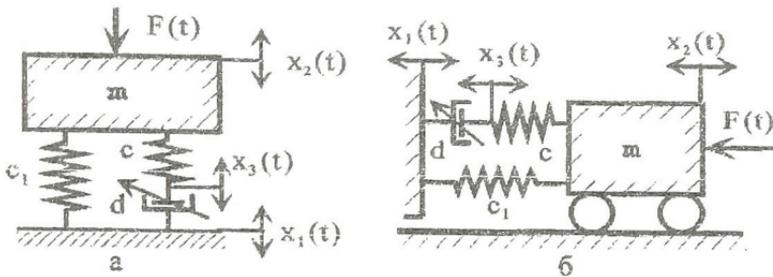


Рисунок 1 - Схема КС с гистерезисным демпфированием и ВЗУ в форме модели Пойнтинга-Томсона (Зенсера) при различной осцилляции

онная и статическая жесткости;  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$  - перемещение основания и его скорость;  $x_2(t)$ ,  $\ddot{x}_2(t)$  - перемещение и ускорение объекта;  $x_3(t)$ ,  $\dot{x}_3(t)$  - перемещение связи между упругим и диссипативным элементами и ее скорость;  $F(t)$  - внешняя сила,  $t$  - время.

Из множества передаточных функций (ПФ) и связанных с ними частотных характеристик [4], которые можно получить на основании систем уравнений (1) и (2), рассмотрим наиболее часто используемые для оценки прочности и структурной целостности объекта, основания и их связей. При кинематическом возмущении это ПФ:  $W_A(s)$ - по абсолютному и  $W_R(s)$  - по относительному параметру (перемещение, скорость, ускорение); здесь  $s$  - комплексная величина, отражающая применение процедуры преобразования Лапласа. В случае силового возмущения:  $W_\Pi(s)$  - по перемещению;  $W_{CK}(s)$  - по скорости;  $W_{YC}(s)$  - по ускорению. Указанные ПФ, модули и аргументы частотных ПФ приведены в табл.1. Здесь  $\mu$  - коэффициент передачи,  $\nu$  - коэффициент динамического усиления.

$\eta = \alpha/\omega_0$  - безразмерная частота возмущения,  
 $A = \frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0^3} s^3 + \frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{N+1}{N} \cdot \frac{2\bar{\xi}}{\omega_0} s + 1$ ;  $B = (1 - \eta^2)^2 + [\zeta(N+1 - \eta^2)/N]^2$ ;  $\varphi$  - угол сдвига фаз;  $\omega_0 = (c_1/m)^{0.5}$  - собственная частота недемпфированной КС;  $N = c/c_1$  - безразмерная жесткость;  $\bar{\xi} = \zeta/2\eta$  - частотно-зависимый безразмерный коэффициент демпфирования;  $\zeta = k/c_1$  - коэффициент потерь; индексы частотных функций соответствуют индексам ПФ. Графики АЧХ по табл.1 представлены на рис.2.

Выражения резонансных значений модулей частотных ПФ и соответствующих им безразмерных резонансных частот в функции коэффициента потерь  $\zeta$  и безразмерной жесткости  $N$  представлены в табл.2. Графики указанных функций приведены на рис. 3...6.

Аналитические выражения оптимальных величин коэффициента

потерь  $\zeta_{опт}$ , которые обеспечивают соблюдение условий минимаксов АЧХ, получаются подстановкой в выражение резонансной частоты  $\eta_p$  по табл.2 частотной координаты инвариантной точки. Последняя определяется из условия равенства ординат предельных резонансов АЧХ.

Выражения координат инвариантных точек и оптимальных значений коэффициента потерь как функций безразмерной жесткости представлены в табл.3 для рассмотренных выше модулей частотных ПФ. Графическая иллюстрация указанных функций приведена на рис.7.

Ограниченный объем публикации не позволяет привести здесь анализ представленного аналитического и графического материала. Поэтому ограничимся лишь формулировкой выводов.

Поведение КС с гистерезисным демпфированием и ВЗУ в форме модели Пойнтинга–Томпсона (Зенера) во многом похоже на поведение КС с вязким демпфированием и тем же видом ВЗУ, но имеет и явные отличия. Так, для рассмотренных АЧХ характерно:

1) при нулевом ( $\zeta = 0$ ) и бесконечном ( $\zeta = \infty$ ) гистерезисном демпфировании АЧХ имеют предельные положения, через точку пересечения которых – инвариантную точку – проходят линии АЧХ при конечных уровнях демпфирования ( $0 < \zeta < \infty$ ) – рис.2. Предельный резонанс при  $\zeta = 0$  локализован на недемпфированной собственной частоте  $\omega_b$ , второй (при  $\zeta = \infty$ ) – на частоте  $\omega_\infty = \omega_b(1+N)^{0.5}$ . Обе резонансные кривые по виду идентичны резонансной кривой консервативной КС;

2) с ростом уровня гистерезисного демпфирования в системе максимумы АЧХ вначале снижаются, проходят через минимум, совпадающий с инвариантной точкой и зависящий только от величины безразмерной жесткости  $N$ , а затем возрастают (рис.2...7). Безразмерные резонансные частоты при этом только возрастают (в отличие от случая вязкого демпфирования) от  $\eta_p = 1$  при  $\zeta = 0$  до  $\eta_p = (1+N)^{0.5}$  при  $\zeta = \infty$ ;

3) инвариантные точки АЧХ при гистерезисном демпфировании совпадают с инвариантными точками аналогичных АЧХ при вязком демпфировании в пределах одной и той же по структуре КС (рис.7.а);

4) один из пары низко- и высокочастотных модулей всех рассмотренных частотных ПФ зависит от гистерезисного демпфирования, второй – нет (в отличие от случая вязкого демпфирования), а темпы затухания низко и высокочастотных колебаний равны соответствующим показателям консервативной КС (рис.2);

5) как и при вязком демпфировании диапазоны низко- и высокочастотной виброизоляции являются функциями уровня демпфирования (параметра  $\zeta$ ) и безразмерной жесткости  $N$  (рис.2). Диапазоны виброизоляции в низкочастотной области не меньше, а в высокочастотной – не больше аналогичных диапазонов консервативной КС;

Таблица 1

Нагру- жение	Передаточная функция $W(s)$	Модуль частотной ПФ (АЧХ): $\mu(\eta), \nu(\eta)$	Аргумент частотной ПФ (ФЧХ): $\varphi(\eta)$
Кинематическое	$W_A(s) = \frac{N+1}{N} \frac{2\bar{\xi}}{\omega_0} s + 1$ $A$	$\mu_A(\eta) = \sqrt{1 + \frac{\left[ \frac{\zeta(N+1)}{N} \right]^2}{B}}$	$\varphi_A(\eta) = \begin{cases} -\arctg(\zeta\eta^2 / Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -\pi - \arctg(\zeta\eta^2 / Q), & \text{при } Q < 0 \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1)(N+1 - \eta^2) / N^2$
	$W_R(s) = \frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0} s^3 - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{s^2}{A}$	$\mu_R(\eta) = \sqrt{\eta^4 + \left( \frac{\zeta\eta^2}{N} \right)^2} / B$	$\varphi_R(\eta) = \begin{cases} -\arctg(\zeta / Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -\pi - \arctg(\zeta / Q), & \text{при } Q < 0, \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1 - \eta^2) / N^2$
Силовое	$W_n(s) = \frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0} s + 1$ $A$	$\nu_n(\eta) = \sqrt{1 + \left( \frac{\zeta}{N} \right)^2} / B$	$\varphi_n(\eta) = \begin{cases} -\arctg(\zeta / Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -\pi - \arctg(\zeta / Q), & \text{при } Q < 0, \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1 - \eta^2) / N^2$
	$W_{сх}(s) = \frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0} s^2 + \frac{1}{\omega_0} \frac{s}{A}$	$\nu_{сх}(\eta) = \sqrt{\eta^2 + \left( \frac{\zeta\eta}{N} \right)^2} / B$	$\varphi_{сх}(\eta) = \frac{1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1 - \eta^2) / N^2}{\zeta}$
	$W_{yc}(s) = \frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0} s^3 + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{s^2}{A}$	$\nu_{yc}(\eta) = \sqrt{\eta^4 + \left( \frac{\zeta\eta^2}{N} \right)^2} / B$	$\varphi_{yc}(\eta) = \begin{cases} -\pi - \arctg(\zeta / Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -2\pi - \arctg(\zeta / Q), & \text{при } Q < 0, \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1 - \eta^2) / N^2$

Таблица 2

Резонансное значение модуля частотной ПФ: $\mu_p, \nu_D$	Безразмерная резонансная частота: $\eta_D$
$\mu_{Ap} = \sqrt{[N^2 + (N+1)^2 \zeta^2](N^2 + \zeta^2) / N^4 \zeta^2}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)\zeta^2}{N^2 + \zeta^2}}$
$\mu_{Rp} = \sqrt{[N^2 + (N+1)^2 \zeta^2](N^2 + \zeta^2) / N^4 \zeta^2}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)^2 \zeta^2}{N^2 + (N+1)\zeta^2}}$
$\nu_{Hr} = (N^2 + \zeta^2) / N^2 \zeta$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)\zeta^2}{N^2 + \zeta^2}}$
$\nu_{CKp} = \sqrt{\frac{0,5(N^2 + \zeta^2)}{\sqrt{[N^2 + (N+1)^2 \zeta^2](N^2 + \zeta^2) - N^2 - (N+1)\zeta^2}}}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)^2 \zeta^2}{N^2 + \zeta^2}}$
$\nu_{ycp} = \sqrt{[N^2 + (N+1)^2 \zeta^2](N^2 + \zeta^2) / N^4 \zeta^2}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)^2 \zeta^2}{N^2 + (N+1)\zeta^2}}$

Таблица 3

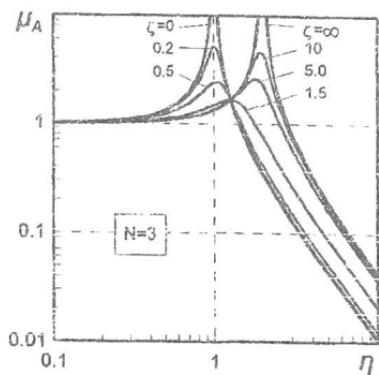
АЧХ	Координаты инвариантных точек		Оптимальный коэффициент потерь $\zeta_{opt}$
	$\eta_{инт}(N)$	$W_{инт}(N)$	
$\mu_0, \nu_c$	$\sqrt{2(N+1)/(N+2)}$	$(N+2)/N$	$N/\sqrt{N+1}$
$\mu_0, \nu_{yc}$	$\sqrt{(N+2)/2}$	$(N+2)/N$	$N/\sqrt{N+1}$
$\nu_n$	$\sqrt{(N+2)/2}$	$2/N$	$N$
$\nu_{cx}$	$\sqrt{(N+2)/2}$	$\sqrt{2(N+2)}/N$	$N\sqrt{(N+4)/(3N+4)}$

6) уровень гистерезисного демпфирования в КС можно оптимизировать при данном значении параметра  $N$  с целью достижения минимальной величины резонансного пика АЧХ – рис.3...7;

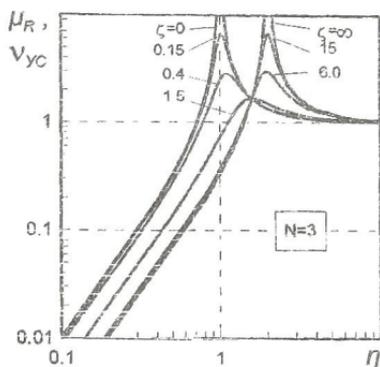
7) резонансные значения всех АЧХ мало чувствительны к изменению уровня демпфирования в окрестности оптимума ( $\zeta_{opt}$ ) – рис.3...6;

8) при малых уровнях гистерезисного демпфирования ( $\zeta < 0,2$ ) и величинах безразмерной жесткости  $N > 1,0$  резонансные значения всех рассмотренных АЧХ очень близки (рис.3...6) и в пределах 10%-ой ошибки могут быть определены из выражения:  $W_p(\zeta) \approx 1/\zeta$ ;

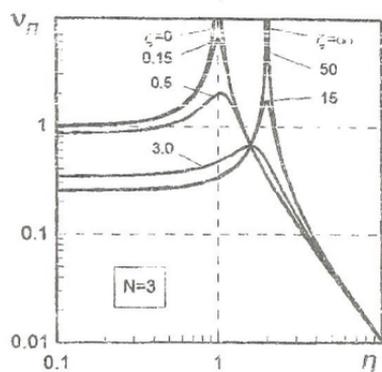
9) резонансные частоты функций  $\mu_R(\eta)$ ,  $\nu_n(\eta)$ ,  $\nu_{CK}(\eta)$ ,  $\nu_{yc}(\eta)$  очень чувствительны к малым отклонениям гистерезисного демпфирования от оптимального значения ( $\zeta_{opt}$ ), а резонансные частоты функций  $\mu_A(\eta)$  и  $\nu_c(\eta)$  - мало чувствительны (рис.3...6);



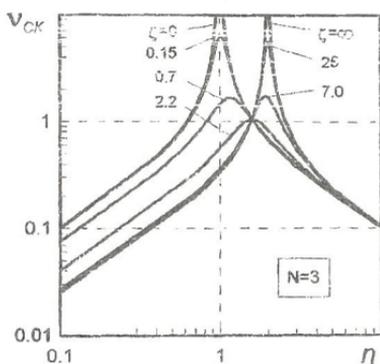
а)



б)

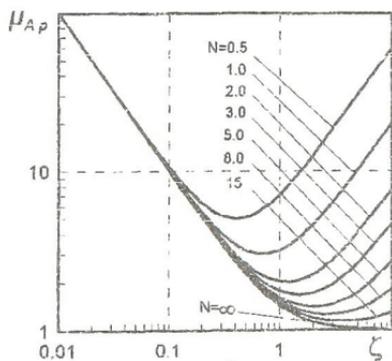


в)

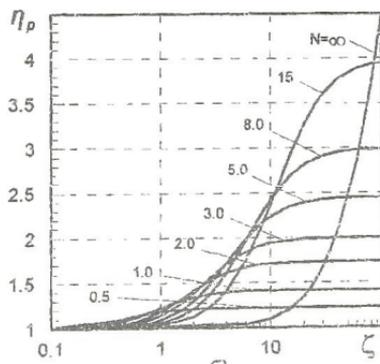


г)

Рисунок 2- АЧХ по абсолютному (а) и относительному (б) параметрам (кинематическое возмущение), по перемещению (в), скорости (г) и ускорению (б) при силовом возмущении



а)



б)

Рис. 3. Резонансные характеристики по абсолютному параметру при кинематическом возмущении

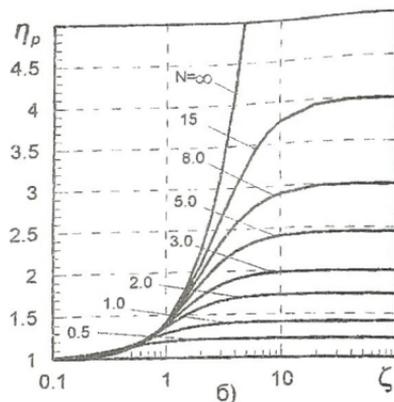
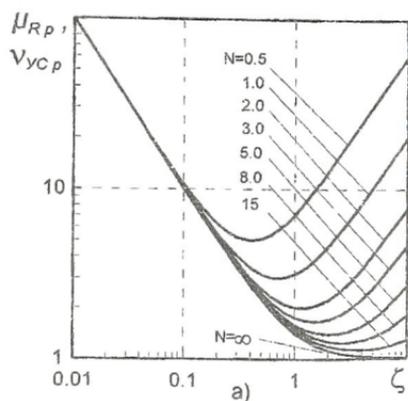


Рис. 4. Резонансные характеристики по относительному параметру (кинематическое возмущение) и ускорению (силовое возмущение)

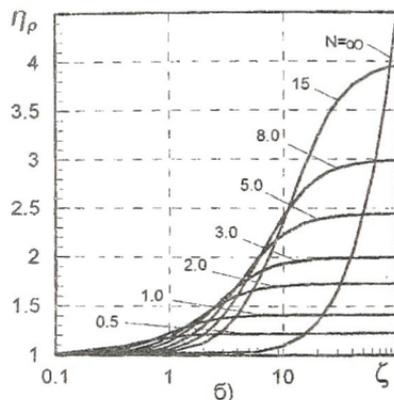
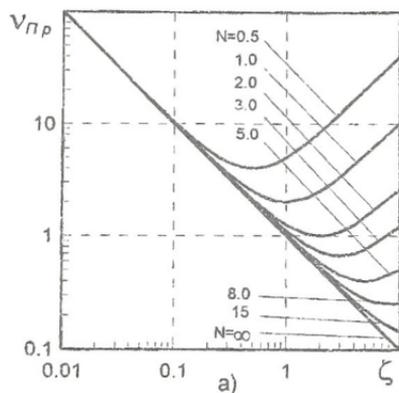


Рис. 5. Резонансные характеристики по перемещению при силовом возмущении

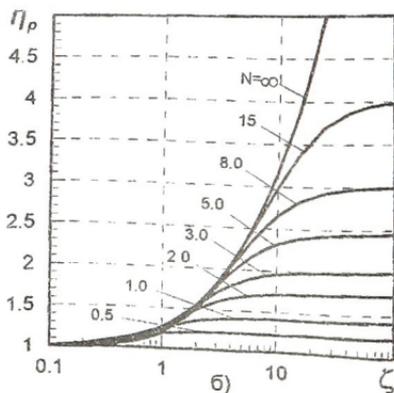
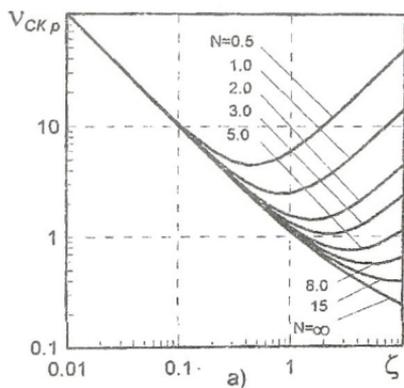


Рис. 6. Резонансные характеристики по скорости при силовом возмущении

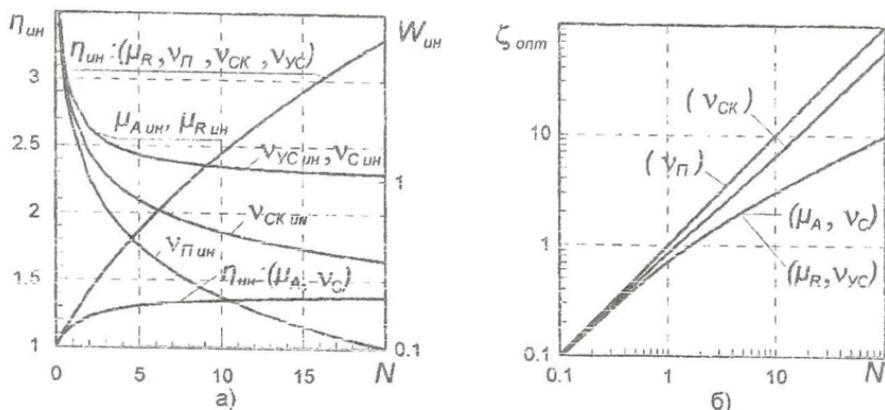


Рис.7. Координаты инвариантных точек (а) и оптимальные величины коэффициента потерь (б) в функции параметра  $N$

10) при малых величинах гистерезисного демпфирования ( $\zeta < 0,1$ ) резонансные частоты всех АЧХ приблизительно равны недемпфированной собственной частоте  $\omega_0$  для всех значений параметра  $N$ ;

11) одновременное обеспечение относительной устойчивости резонансных значений АЧХ и их резонансных частот к флуктуациям гистерезисного демпфирования в окрестности оптимальной величины ( $\zeta_{опт}$ ) возможно для функций  $\mu_A(\eta)$  и  $\nu_C(\eta)$ , тогда как для функций  $\mu_R(\eta)$ ,  $\nu_{\Pi}(\eta)$ ,  $\nu_{СК}(\eta)$ ,  $\nu_{УС}(\eta)$  – нет (рис.3...6).

При заданной недемпфированной собственной частоте  $\omega_0$ , величина которой обычно зависит от статической осадки КС, выбор значений параметров  $\zeta$  и  $N$  для рассматриваемой модели может иметь или не иметь компромиссного характера в зависимости от того, модуль какой частотной передаточной функции является при этом приоритетным.

#### Список литературы

1. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Д. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. – Киев: Наукова Думка, 1971. – 375 с.
3. Чегодаев Д.Е., Пономарев Ю.К. Демпфирование. – Самара: Изд-во СГАУ, 1997. – 334 с.
4. Динамические свойства линейных виброзащитных систем. – М.: Наука, 1982. – 208 с.