ЯВЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДВИГАТЕЛЯХ МАЛОЙ ТЯГИ И НАПРАВЛЕНИЯ БОРЬБЫ С НИМ

Белоусов А.И., Максютин А.А.
Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Реактивные системы управления космических летательных аппаратов используются для ориентации аппаратов в пространстве, коррекции вектора скорости и траектории полета и многих других целей. В них входят группы ЖРД малой тяги (ЖРДМТ, или микродвигателей), различающихся по величине управляющего усилия ($10^{-3}..10^{3}$ Н) и другим характеристикам. Наиболее надежными и простыми в использовании являются микродвигатели на однокомпонентном топливе, таком, как гидразин N_2H_4 или перекись водорода H_2O_2 [1].

Для таких ЖРДМТ чрезвычайно важен катализатор разложения топлива. Обычно для разложения H_2O_2 применяют перманганат калия $KMnO_4$, но самыми перспективными являются катализаторы на твердом носителе, например, на основе материала МР.

Технические трудности, возникающие при создании катализаторов разложения монотоплива, обусловлены довольно противоречивыми требованиями. Это, с одной стороны, стабильность энергетических характеристик в условиях глубокого вакуума и при воздействии вибрационных перегрузок, достаточная ресурсоёмкость при непрерывной работе и т.д. С другой стороны, это технологичность изготовления и термостойкость самого катализатора, который должен обеспечивать ресурсную работу двигателя при температуре в камере до 1000 ^{0}С.

При создании первых однокомпонентных ЖРДМТ для разложения монотоплива использовались хорошо изученные гранулированные катализаторы. Катализаторы данного типа имели ряд существенных недостатков:

- ограниченные ресурсные возможности, что связано с уносом катализатора в процессе работы;
- разрушение катализатора под действием низкочастотных колебаний;
- спекание и отравление катализатора в процессе наработки ресурса;
- нестабильность рабочих параметров при значительном сроке эксплуатации;
- трудоёмкость изготовления.

Металлические катализаторы, изготовленные в виде брикетов из материала МР (обозначим их КМР), более устойчивы к процессам эрозии, спекания и отравления. Их основным достоинством является стабильность параметров при значительном сроке эксплуатации. Но активность таких катализаторов по сравнению с гранулированными недостаточна для самостоятельного инициирования процесса разложения при 0..25 ^{o}C, т.е. необходим дополнительный источник подогрева (электрический, химический или радиоактивный).

Термическая устойчивость КМР определяется температурой размягчения и рекристаллизации проволоки, которая должна превышать возможные значения температуры в камере разложения. Химическая устойчивость металлов определяется отсутствием необратимых химических и структурных изменений при взаимодействии с продуктами разложения монотоплива.

На основании вышеизложенного можно судить о перспективности использования простых в изготовлении КМР.

Однако в таких катализаторах могут возникнуть автоколебания. В настоящей работе проанализирована математическая модель автоколебаний перекисеводородного микродвигателя, где используется именно такой катализатор разложения.

Рассмотрим причины возникновения автоколебаний. Исходными положениями и допущениями будут следующие.

1. Разложение в КМР происходит в основном в узкой зоне - фронте реакции; фронту предшествует зона жидкофазных и двухфазных физико-химических превращений (частичное разложение и, в основном, испарение) протяженностью $l_п$; за фронтом располагается зона вторичных реакций и тепловых потерь.

2. Перегрузки на стационарном (импульсном и непрерывном) режиме подачи компонента и переходных режимах работы КМР (запуск и останов), а также колебания давления и температуры в камере разложения заложены в самой природе процесса каталитического разложения компонента и вызываются резким скачкообразным (типа взрыва) изменением скорости разложения. Это может иметь место при:

- расколе, “шелушении” проволоки (резкое увеличение поверхности разложения, изменение сопротивления);
- гомогенном разложении одиночных капель компонента за фронтом реакции (как за слоем катализатора, так и внутри него);
- переходе реакции в объём (с поверхности катализатора) имеет место при повышенном давлении, когда скорость гомогенного

разложения (в объёме) сравнима со скоростью гетерогенного (на поверхности проволочек МР);
- подаче компонента на разогретую до некоторой температуры поверхность КМР и деталей корпуса; величина и диапазон температур, при которых происходит резкое (“взрывное”) вскипание компонента, определяются активностью поверхности и величиной давления в камере $p_к$;
- резком сбросе давления из системы также может произойти “взрывное” вскипание, эффект которого зависит от температуры и давления компонента.

Исходя из физики проявления отмеченных явлений низкочастотные колебания можно рассматривать как проявление ударных (“взрывных”) сил и, следовательно, описывать их с помощью $\delta(t)$ функции Дирака.

3. При скорости потока, характерной для КМР, сопротивление слоя катализатора описывается квадратичным законом

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{\rho W^2}{2}, \qquad (1)$$

где λ - коэффициент гидравлического трения;
l - длина участка трения;
D - диаметр канала трения;
ρ - плотность среды;
W- скорость потока.

4. Скорость химических реакций (гомогенных и каталитических) ограничена по величине сверху, т.е. не мгновенна. Это может привести к колебаниям давления $p_к$ в камере из-за различной зависимости от давления:
- массового расхода жидкого компонента через форсунку (форсунки), определяемого уравнением

$$\dot{m}_ж \approx A\sqrt{\Delta p} = A\sqrt{p_б - p_к}\ , \qquad (2)$$

и газообразных продуктов через критическое сечение сопла, рассчитываемого по формуле

$$\dot{m}_г = B \cdot p_к\ . \qquad (3)$$

Зависимость (2) нелинейная, а (3) - линейная.

5. В соответствии с имеющимися экспериментальными данными и опытом эксплуатации ЖРДМТ высокочастотные колебания в КМР отсутствуют.

6. КМР совместно с системой подачи образуют классический пример автоколебательной системы, имеющей:

- колебательный контур - бак с линией подачи и камеру разложения;
- источник энергии - систему вытеснения (сжатый газ с давлением $p_б$ или насос);
- клапан;
- линию обратной связи.

Таким образом, рассматриваемая система может совершать низкочастотные колебания, параметры которых определяются свойствами самой системы. На основании отмеченных основных положений и допущений приступим к выводу основных уравнений.

Автоколебания описываются дифференциальным уравнением вида

$$m\ddot{x} + cx = \mu f(x, \dot{x}), \qquad (4)$$

где m - масса системы;

c - жесткость упругого элемента системы (роль которого в случае КМР выполняют газообразные продукты разложения);

μ - параметр нелинейности;

$f(x,\dot{x})$ - функция, определяющая влияние сил трения и возмущения на процесс колебаний.

Считая, что в КМР основные потери напора определяются трением потока в порах МР, можно записать для силы трения в слое до фронта

$$R = \lambda \frac{l_n}{D} \cdot S \frac{\rho W^2}{2}, \qquad (5)$$

где l_n - протяжённость жидкофазной и двухфазной зоны в КМР;

S - площадь поперечного сечения КМР;

W - скорость потока в рассматриваемой зоне (до фронта реакции).

При выборе длины l_n учитывается, что газофазная область после фронта разложения выполняет функции пружины, а поверхность фронта играет роль поршня, отделяющего систему от пружины. Скорость потока W в принципе переменная, изменяющаяся от значения скорости на входе в КМР (жидкий компонент) до скорости паров в конце зоны разложения длиной l_n. Для расчётов воспользуемся некоторой эффективной скоростью, удовлетворяющей уравнению (5). Это замечание относится и к плотности потока ρ.

Проанализируем протяженность l_n слоя КМР до фронта. Понятно, что для её прохождения потоком со скоростью W потребуется время τ_n - время фазового перехода :

$$l_{\ddot{i}} = W\tau_{\ddot{i}} = \dot{x}\,\tau_n \qquad (6)$$

Тогда согласно соотношениям (5) и (6)

$$R_{mp} = \frac{1}{2}\lambda\rho n x^{3}\tau_n\,, \qquad (7)$$

где $n = S/D$ пропорционально числу каналов в поперечном сечении слоя КМР.

Возбуждающая колебания сила согласно допущению 2 может быть описана с помощью $\delta(t)$ функции Дирака. Будем считать, что удар (возмущение) вызывается некоторым количеством компонента m, мгновенно (в сравнении с длительностью других процессов) разложившимся в КМР (неважно, где: за слоем катализатора или внутри) и сообщившим системе скорость $W = x$.

Иными словами, представим силу возмущения в виде

$$R_{\text{в}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(m,W)dt = f(m,W). \qquad (8)$$

Вид этой функции в соответствии с отмеченным выше будет выглядеть как

$$R_{\text{в}} = \mu m x\,, \qquad (9)$$

где μ - некоторый параметр пропорциональности, а величины m и x таковы, что их произведение с учетом μ соответствует удару (возмущению), приведшему систему к автоколебаниям.

Подставив выражения (7) и (9) с учетом знаков в уравнение (4), получим

$$m x + cx = \mu m x - \frac{\lambda\rho n\tau_n x^{3}}{2}. \qquad (10)$$

Преобразуем уравнение (10) к виду

$$\dot{x} + \omega_0^2 x = 2n_1 x - n_2 \dot{x} \quad , \qquad (11)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$; $n_1 = \dfrac{\mu m}{2m}$ и $n_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\lambda \rho n \tau_n}{m}$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его можно решить методом Лагранжа (с учетом допущения Ван-дер-Поля о постоянстве амплитуды и фазы за период колебания) [2]. Лицеисту (второй соавтор) было предложено проанализировать другой способ решения.

Данная система является слабо нелинейной, и поэтому оказалось возможным применить метод гармонической линеаризации Н.Н. Боголюбова [3,4]. Суть его состоит в том, что нелинейные силы, участвующие в колебательных системах, заменяются специальным образом построенными линейными функциями, в силу чего он позволяет использовать теорию линейных дифференциальных уравнений для приближённого анализа нелинейных систем. Линейные функции, приближённо представляющие нелинейные силы, строятся с помощью приёма, называемого гармонической линеаризацией. Он состоит в следующем.

Пусть задана нелинейная функция (например, сила), зависящая от искомой функции x, её производной $\dot{x}$ и малого параметра μ:

$$F(x, \dot{x}, \mu) \equiv \mu f\, ,\; f \equiv f(x, \dot{x}).$$

Гармонической линеаризацией называется замена функции $F(x, \dot{x}, \mu)$ линейной функцией вида $F_l = kx + \lambda \dot{x}$, где параметры k и λ вычисляются по формулам

$$k(a, \mu) = \frac{\mu}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi \; ; \qquad (12)$$

$$\lambda(a, \mu) = -\frac{\mu}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f\,(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi \; , \qquad (13)$$

где $\psi = \omega t + \alpha$.

Принято называть функцию F_l *эквивалентной линейной силой*, k *– эквивалентным коэффициентом упругости,* λ*- эквивалентным коэффициентом затухания.*

В нашем случае $f(x,x)=2n_1 x-n_2 x^3=f(x)$, т.е. не зависит от x. По формулам (12) и (13)

$$k(a,\mu)=\frac{\mu}{\pi a}\int_0^{2\pi}[-2n_1 a\omega\sin\psi-n_2(a\omega\sin\psi)^3]\cos\psi d\psi=$$

$$=\frac{\mu n_1 a\omega}{2\pi a}\cdot\cos 2\psi\Big|_0^{2\pi}+\frac{\mu n_2 a^3\omega^3}{\pi a}\cdot\frac{\sin^4\psi}{4}\Big|_0^{2\pi}=0;$$

$$\lambda(a,\mu)=-\frac{\mu}{\pi a\omega}\int_0^{2\pi}[-2n_1 a\omega\sin\psi-n_2(a\omega\sin\psi)^3]\sin\psi d\psi=$$

$$=\frac{2\mu n_1 a\omega}{\pi a\omega}\int_0^{2\pi}\sin^2\psi d\psi-\frac{\mu n_2 a^3\omega^3}{\pi a\omega}\int_0^{2\pi}\sin^4\psi d\psi=$$

$$=2\mu n_1-\frac{3}{4}\mu n_2 a^2\omega^2=\mu\left(2n_1-\frac{3}{4}n_2 a^2\omega^2\right).$$

Таким образом, эквивалентная линейная сила F_l равна

$$F_l=\lambda x=\mu\left(2n_1-\frac{3}{4}n_2 a^2\omega^2\right)x. \qquad (14)$$

Согласно методу гармонической линеаризации заменяем уравнение (11) линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (при тех же начальных условиях):

$$\ddot{x}-\mu\left(2n_1-\frac{3}{4}n_2 a^2\omega^2\right)\dot{x}+\omega_0^2 x=0 . \qquad (15)$$

Согласно методу Эйлера ищем решение в виде $x(t)=e^{ht}$. Тогда, подставив это решение в уравнение (15) и разделив на $e^{ht}\neq 0$, получим

$$h^2-\mu\left(2n_1-\frac{3}{4}n_2 a_2\omega^2\right)h+\omega_0^2=0 \qquad (16)$$

Это характеристическое уравнение уравнения (15). Его корни

$$h_{1,2} = \frac{\mu\left(2n_1 - \frac{3}{4}n_2 a^2 \omega_0^2\right) \pm \sqrt{\mu^2\left(2n_1 - \frac{3}{4}n_2 a^2 \omega_0^2\right)^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Рассмотрим три случая и найдём частные решения, удовлетворяющие начальным условиям: $x(0)=x_0$; $\dot{x}(0)=v_0$ (x_0 начальное давление в камере; v_0 - скорость изменения давления в начальный момент времени). Нахождение частных решений дифференциального уравнения, удовлетворяющих начальным условиям, известно как задача Коши.

1-й случай: D>0, тогда $h_{1,2}$ действительные и различные и, следовательно,

$$x(t) = C_1 e^{h_1 t} + C_2 e^{h_2 t};\ x'(t) = C_1 h_1 e^{h_1 t} + C_2 h_2 e^{h_2 t}.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ C_1 h_1 + C_2 h_2 = v_0 \end{cases}$$

находим

$$C_2 = \frac{v_0 - x_0 h_2}{h_1 - h_2};\ C_1 = \frac{v_0 - x_0 h_2}{h_2 - h_1}.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$x(t) = \frac{v_0 - x_0 h_2}{h_1 - h_2} \cdot e^{h_1 t} + \frac{v_0 - x_0 h_1}{h_2 - h_1} \cdot e^{h_2 t}. \qquad (17)$$

2-й случай: D=0, тогда $h_{1,2}$ действительные и кратные, т.е. $h_1 = h_2 \overset{df}{=} h$.

Следовательно, $x(t) = C_1 e^{ht} + C_2 t \cdot e^{ht}$.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_1 h + C_2 = v_0 \end{cases}$$

получаем $C_1 = x_0;\quad C_2 = v_0 - x_0 h.$
Частное решение имеет вид

$$x(t)=x_0e^{ht} + (v_0 - x_0h)te^{ht}. \tag{18}$$

3-й случай: D<0, тогда $h_{1,2}$ комплексно сопряженные, т.е.
$h_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$

Тогда $x(t) = C_1e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2e^{\alpha t}\sin\beta t.$
Из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_1\alpha + C_2\beta = v_0 \end{cases}$$

следует, что

$$C_1=x_0;\ C_2 = \frac{v_0 - x_0\alpha}{\beta}.$$

Частное решение в этом случае имеет вид

$$x(t) = x_0e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{v_0 - x_0\alpha}{\beta}\cdot e^{\alpha t}\sin\beta t. \tag{19}$$

Таким образом, задача Коши решена.

Применимость метода гармонической линеаризации определяется по *теореме Н.Н.Боголюбова*, которая качественно выражает следующее:

Если уравнение вида (4) имеет решение вида $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, *прчём* $\frac{dA}{dt} = O(\mu)$ *и* $\omega = O(\mu)$, *то разность решений уравнений* (4) *и* (15) *является величиной* $O(\mu^2)$.

Запись $O(x)$ означает "величина того же порядка малости, что и x".

Проверим условия теоремы Н.Н. Боголюбова.

1. $\frac{dA}{dt} = O(\mu) \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = r\mu$ (где r - некоторая константа).

Преобразуем это выражение к виду $dA = r\mu dt$; проинтегрировав, получим $A = r\mu t$ ($r\mu \ll 1$, так как $\mu \ll 1$). *Это означает, что амплитуда мало изменяется во времени, что равносильно допущению Ван-дер-Поля* [2].

2. $\omega = O(\mu) \Leftrightarrow \omega = p\mu$ (где p - некоторая константа). Так как $\mu \ll 1$, то и $p\mu \ll 1$. Поэтому $\omega \ll 1$, что *равносильно низкочастотности колебаний, а это имеет место в нашей работе* (здесь параметры колебаний безразмерные).

Таким образом, для рассматриваемой в данной работе задачи выполнены условия теоремы Н.Н. Боголюбова, следовательно, применение метода гармонической линеаризации обоснованно.

Из трёх полученных частных решений (17), (18) и (19) нас больше всего интересует последнее, так как колебания будут затухающими именно тогда, когда корни уравнения (16) будут комплексными.

Из условия затухания колебаний ($\alpha<0$) получаем

$$A > \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\frac{2n_1}{3n_2}}, \tag{20}$$

т.е. амплитуда колебаний стремится к стационарному значению

$$A_{\text{ст}} = \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\frac{2n_1}{3n_2}}.$$

В случае, когда $\alpha=0$, неравенство (20) обращается в равенство $A = A_{\text{ст}}$, т.е. устанавливается предельный цикл.

Подставив в выражение (20) вместо ω_0, n_1 и n_2 их значения, имеем

$$A_{\text{ст}} = 2\sqrt{\frac{2m\mu\, m\, D}{3c\lambda\rho S\tau_n}}. \tag{21}$$

Коэффициент гидравлического трения λ для данной системы вычисляется по формуле [5]

$$\lambda = \frac{2\Pi^3 d_n \cdot \Delta p}{\rho W^2 l(1-\Pi)}, \tag{22}$$

где пористость П - безразмерная величина, равная отношению объёма пустот в катализаторе к его общему объёму. Подставляя (22) в (21), окончательно имеем:

$$A_{\text{ст}} = 2\sqrt{\frac{m\mu\, m\, DW^2 l(1-\Pi)}{6cS\tau_n \Pi^3 d_n \Delta p}} = A_{\text{ст}}(d_n, \Pi). \qquad (23)$$

Видно, что величина стационарной амплитуды колебаний обратно пропорциональна частоте колебаний, т.е. снижается при *увеличении жёсткости системы (величины давления в камере)* и *снижении её массы.* Выражение (23) позволяет наметить пути борьбы с низкочастотными колебаниями:

- *Увеличение жёсткости системы (величины давления в камере);*
- *Снижение пористости материала МР;*
- *Снижение массы системы;*
- *Уменьшение диаметра проволоки.*

Список литературы

1. Беляев Н.М., Белик Н.П., Уваров Е.И. Реактивные системы управления космических летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1979.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981.
3. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. - М.: Наука, 1986.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Изд-во АН СССР, 1963.
5. Белоусов А.И. Гидродинамика втулочных неоднородных дросселей из материала МР//Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов: Куйбышев, КуАИ, 1983.-с.19-24.