

колеблется по всем своим формам и частотам. 2. В любой упругой системе даже с одной зубчатой передачей может быть параметрическая неустойчивость. 3. Не все собственные формы сильно резонируют ; сильно резонируют формы с резким изменением своих параметров , когда зубчатые колеса колеблются навстречу друг другу . 4. Очень широкий диапазон неустойчивости оказывается в районе оборотов в два раза больше чем собственные обороты по зубной частоте по невыгодным собственным формам , когда колеса колеблются навстречу друг другу. 5. Часто бывает, что шестерня и колесо колеблются с разными частотами и по разным формам . Поэтому при торсиографировании и тензометрировании валов в изделиях трудно обнаружить источники возбуждения колебаний .

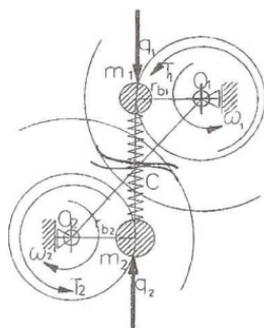
ЗАМЕЧАНИЯ К РАСЧЕТУ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ГОСТУ

Курушин М. И. , Курушин А. М.

Самарский государственный аэрокосмический университет , г.Самара

При определении расчетной нагрузки и контактных напряжений в ГОСТе и во всей учебной литературе по курсу "Детали машин" вводится коэффициент $Z\varepsilon$ якобы учитывающий "суммарную длину контактных линий". При этом, в прямозубых передачах этот коэффициент - $Z\varepsilon = \sqrt{(4 - \varepsilon_\alpha)/3}$, а в косозубых - $Z\varepsilon = \sqrt{1/\varepsilon_\alpha}$, где ε_α - коэффициент торцевого перекрытия. Необходимо отметить, что касается косозубой передачи, то этот коэффициент действительно учитывает суммарную длину контактных линий одновременно находящихся в контакте зубьев. А вот что касается прямозубых передач ,то здесь есть серьезные возражения. Во-первых, расчет на контактную прочность ведется, как правило, в полюсе зацепления, когда в контакте находится, естественно, одна пара зубьев и длина контактных линий равна минимальной ширине зубчатого венца и трактовать ее как "суммарную длину контактных линий" по аналогии с косозубыми колесами просто неприлично. Кроме того еще и утверждается, что этот коэффициент найден экспериментально. Действительно, коэффициент перекрытия ε_α существенно влияет на нагрузку и напряжения, но природа его совершенно другая, чем это трактуется. На самом деле, этот коэффициент выводится теоретически и является неудачным обобщением исследования параметрических колебаний одиночной зубчатой пары при очень больших оборотах, когда частота зацепле-

ния более чем в два раза выше собственной частоты упругих колебаний системы на жесткости зубьев. В процессе работы зубчатые колеса совершают сложные изгибно-крутильные колебания и параметрические колебания на податливостях зубьев, валов и опор совместно с присоединенными деталями механизмов и изделий. Для начала сделаем следующие упрощающие допущения: присоединенных масс нет; изгибные и крутильные колебания валов не учитываются; опоры - абсолютно жесткие без сопротивления вращению шарниры; крутящие моменты постоянные; зубчатые колеса по точности идеальные (без погрешностей); податливости пар зубьев в процессе зацепления постоянные; коэффициент перекрытия $1 < \varepsilon_a < 2$.



упругая модель
зубчатой пары
Рис.1

Крутильные колебания зубчатых колес относительно положения квазистатического равновесия эквивалентны продольным колебаниям масс зубчатых колес, приведенных к основным окружностям и связанных между собой жесткостью зубьев. -рис.1. Приведенные массы имеют значения:

$$m_1 = 4 \cdot J_{P1} / \left(b_1 \cdot (d_{b1})^2 \right);$$

$$m_2 = 4 \cdot J_{P2} / \left(b_2 \cdot (d_{b2})^2 \right);$$

Здесь J_{P1} ; J_{P2} - массовые полярные

моменты инерции зубчатых колес; b_1 ; b_2 - ширины зубчатых венцов колес; d_{b1} ; d_{b2} - диаметры основных окружностей колес. Дифференциальные уравнения колебаний зубчатых колес вдоль линии зацепления:

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = q - C \cdot (y_1 - y_2); \quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -q + (y_1 - y_2) \cdot C$$

Здесь q - удельная (на единицу длины контакта зубьев) нагрузка от передаваемых крутящих моментов; C - удельная жесткость (на единицу длины контакта зубьев); y_1 ; y_2 - смещения масс зубчатых колес при колебаниях под нагрузкой q . Введем координату относительного смещения масс зубчатых колес вдоль линии зацепления ("сжатие и растяжение пружины") $y = y_1 - y_2$ - деформация зубьев; $y' = y_1' - y_2'$ - скорость деформации зубьев; $y'' = y_1'' - y_2''$ - ускорение деформаций зубьев;

Тогда получим $y_1^{11} = \frac{q}{m_1} - \frac{C}{m_1} \cdot y$; $y_2^{11} = -\frac{q}{m_2} + \frac{C}{m_2} \cdot y$.

Вычитая, получим $y_1'' - y_2'' = q \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - C \cdot y \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$.

Обозначим $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m}$, где m - приведенная масса зубчатых

колес. Обозначим $\frac{C}{m} = p^2$; здесь $p = \sqrt{\frac{C}{m}}$ - круговая частота собст-

венных колебаний пары зубчатых колес на жесткости зубьев. Тогда окончательно дифференциальное уравнение крутильных колебаний пары зубчатых колес примет вид $y^{11} + p^2 \cdot y = \frac{q}{m}$ (1)

Это - неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$y = A \cdot \cos(p \cdot t) + B \cdot \sin(p \cdot t) + y^*$, где y^* - частное решение,

зависящее от вида правой части уравнения. Положим $y^* = D$; тогда,

подставив в (1), получим $p^2 D = q/m$,

$D = \frac{q}{(p^2 \cdot m)} = q/C = y_{cm}$, где y_{cm} - деформация зубьев от

действия статической нагрузки, но так как нас интересует только динамическая составляющая движения зубчатых колес, то примем $y_{cm} = 0$.

Тогда общее решение будет $y = A \cdot \cos(p \cdot t) + B \cdot \sin(p \cdot t)$. Началь-

ные условия для определения произвольных постоянных примем, при $t=0$: $y = y_0$; $y' = V_0$. Получим $A = y_0$, $B = V_0/p$. Оконча-

тельно уравнение колебаний зубчатых колес на постоянной жесткости зубьев имеет вид $y = y_0 \cdot \cos(p \cdot t) + (V_0/p) \cdot \sin(p \cdot t)$

Периодическая смена однопарного и двухпарного зацеплений (пересопряжение) ведет к возникновению параметрических колебаний (периодически меняется параметр упругой системы - жесткость ее). На Рис.2 показано изменение жесткости пары зубьев за период ее зацепления. A - начало зацепления; B - конец зацепления; W - полюс зацепления; t - время; t_1 - время однопарного зацепления; t_2 - время двухпарного зацепления; T_3 - время, соответствующее частоте зацепления; c_1 -

удельная жесткость пары зубьев в районе однопарного зацепления; c_2 - удельная жесткость пары зубьев в районе двухпарного зацепления; Из рисунка следует:

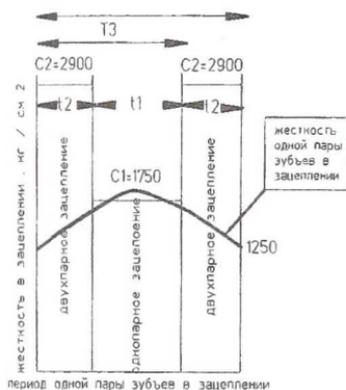


Рис.2

$$\varepsilon_\alpha \cdot t_2 + t_1 = \varepsilon_\alpha \cdot T_3;$$

$$t_2 + t_1 = T_3 ; \quad t_1 = (2 - \varepsilon_\alpha) \cdot T_3;$$

$$t_2 = (\varepsilon_\alpha - 1) \cdot T_3 ; \quad T_3 = 60 / (n \cdot z).$$

Здесь n - частота вращения зубчатого колеса, *об/мин*; а z - число зубьев на нем. Рассмотрим случай малого значения перекрытия ($\varepsilon_\alpha \approx 1$), т. е. t_2 мало. Тогда $t_1 = T_3$, а само нагружение зуба можно считать импульсным, т. е. таким, когда смещением в упругой системе можно пренебречь, а скорость получает мгновенное приращение -

ΔV -рис.3. $S = \Delta q \cdot t_2 = m \cdot V_1 - m \cdot V_2 = \Delta V$. Отсюда $\Delta V = S/m$. Рассмотрим статический характер движения: $y_1 = q/c_1$ - смещение в зоне

однопарного зацепления;

$y_2 = q/c_2$ - смещение в зоне

двухпарного зацепления;

$\Delta y = y_1 - y_2 = q \cdot (c_2 - c_1) / c_1 \cdot c_2$ - разность смещений.

$\Delta q = c_2 \cdot \Delta y = q \cdot (c_2 - c_1) / c_1$ -

приращение усилия в зацеплении за счет смены жесткостей. Тогда импульс действия будет

$$S = \Delta q \cdot t_2 = q \cdot \left(\frac{c_2 - c_1}{c_1} \right) \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \cdot T_3,$$

Движение системы в зоне однопарного зацепления (в точке "0")

$$y = y_0 \cdot \cos(p_1 \cdot t) + \frac{V_0}{p_1} \cdot \sin(p_1 \cdot t); \quad y' = -y_0 \cdot p_1 \sin(p_1 \cdot t) + \frac{V_0}{p_1} \cdot \cos(p_1 \cdot t)$$

В конце зацепления (в точке "1"), когда $t = T_3$

$$y_1 = y_0 \cdot \cos(p_1 \cdot T_3) + \frac{V_0}{p_1} \cdot \sin(p_1 \cdot T_3); \quad y'_1 = -y_0 \cdot p_1 \cdot \sin(p_1 \cdot T_3) + V_0 \cdot \cos(p_1 \cdot T_3).$$

После действия импульса смещение не изменится, а скорость движения получит приращение $\Delta V = (S/m)$, тогда в точке "2"

$$y_2 = y_1 = y_0 \cdot \cos(p_1 \cdot T_3) + \frac{V_0}{p_1} \cdot \sin(p_1 \cdot T_3); \quad y_1^1 = -y_0 \cdot p_1 \cdot \sin(p_1 \cdot T_3) + V_0 \cdot \cos(p_1 \cdot T_3) - S/m$$

При установившемся движении, когда начальные возмущения исчезнут, при входе очередного зуба в зацепление должно быть $y_2 = y_0$ и

$$y_2^1 = V_0, \text{ т.е. } y_0 = y_0 \cdot \cos(p_1 \cdot T_3) + \frac{V_0}{p_1} \cdot \sin(p_1 \cdot T_3)$$

$0 = -y_0 \cdot p_1 \cdot \sin(p_1 \cdot T_3) + V_0 \cdot \cos(p_1 \cdot T_3) - S/m$. Решая систему уравнений совместно, получим

$$y_0 = -\frac{S}{(2 \cdot m \cdot p_1)} \operatorname{ctg}\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right), \quad 0 = -S/(2 \cdot m).$$

Тогда окончательно уравнение колебаний зубчатой пары при импульсном возбуждении будет

$$Y = -\frac{S}{(2 \cdot m \cdot p_1)} \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right) \cdot \cos(p_1 \cdot t) + \sin(p_1 \cdot t) \right].$$

Определим динамическое смещение в полюсе зацепления при $t = T_3/2$:

$$Y_w = -\frac{S}{(2 \cdot m \cdot p_1)} \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right) + \sin\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right) \right] = -\frac{S}{(2 \cdot m \cdot p_1)} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right)}$$

Динамическое усилие в полюсе зацепления $q_{qw} = C_1 \cdot y_w =$

$$= -\frac{S \cdot C_1}{(2 \cdot m \cdot p_1)} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right)} = -q \cdot \frac{(C_2 - C_1)}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \cdot \frac{\frac{p_1 \cdot T_3}{2}}{\sin\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right)}$$

Видно, что при $\frac{p_1 \cdot T_3}{2} = k \pi$, где $k=0,1,2,3$, динамическое усилие

стремится к ∞ , т.е. имеет место параметрический резонанс. Полное усилие в полюсе зацепления будет

$$q_{w \max} = q - q_{qw} = q \cdot \left[1 - \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \cdot \frac{\frac{p_1 \cdot T_3}{2}}{\sin\left(\frac{p_1 \cdot T_3}{2}\right)} \right],$$

Коэффициент динамичности в полюсе

$$K_{vw} = \frac{q_{w \max}}{q} = 1 - \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \cdot \frac{\frac{p_1 T_3}{2}}{\sin\left(\frac{p_1 T_3}{2}\right)} \quad (2)$$

При очень большой скорости вращения, когда $p_1 \cdot T_3/2 \rightarrow 0$ имеем $(p_1 \cdot T_3/2)/\sin(p_1 \cdot T_3/2) \rightarrow 1$ и тогда

$$K_{vw} \rightarrow 1 - \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \quad \text{Если принять } C_2 = 2900 \text{ кг/см}^2,$$

$C_1 = 1750 \text{ кг.см}^2$, то получим $K_{vw} = 1 - 0,68 \cdot (\varepsilon_\alpha - 1)$. Т.е. нагрузка в полюсе зацепления меньше статической; коэффициент динамичности $K_{vw} < 1$ Можно преобразовать выражение для K_{vw} так

$$K_{vw} = \frac{C_2}{C_1} - \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot \varepsilon_\alpha \quad \text{По экспериментам в нашей стране}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2900}{1725} = 1,68 \approx \frac{5}{3} \quad \text{Тогда } K_{vw} = \frac{5}{3} - \frac{5-3}{3} \cdot \varepsilon_\alpha = \frac{5-2 \cdot \varepsilon_\alpha}{3} \quad \text{В Ев-}$$

ропе, учитывая большую податливость в вершинах зубьев, вероятно, приняли $\frac{C_2}{C_1} = \frac{4}{3}$, тогда $K_{vw} = \frac{4}{3} - \frac{5-3}{3} \cdot \varepsilon_\alpha$, а это, как раз, и есть

коэффициент по ГОСТ. $Z_\alpha = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}} \leq 1$, который используется в

проверочных расчетах зубчатых колес на контактную прочность и трактуется как эмпирический коэффициент для определения длины контак-

тной линии (ширины зубчатого венца) в полюсе зацепления прямозубой передачи. На самом же деле, как мы установили, этот коэффициент учитывает влияние параметрических колебаний зубчатых колес да еще в наиболее благоприятном случае очень быстроходных передач, когда частоты зацеплений больше частот собственных колебаний упругой системы в которую входят зубчатые передачи. На самом

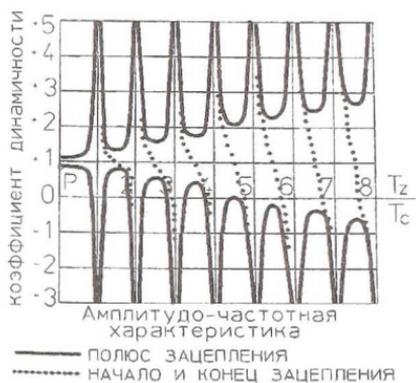


Рис 4

деле этого может не быть, т.е. частоты зацеплений могут быть меньше собственных частот, а в этом случае коэффициент динамичности может быть существенно больше единицы и, кроме того, могут быть параметрические резонансы. Это видно из рис.4, который построен по зависимости (2) для нагрузки в полюсе зацепления при $\varepsilon_\alpha = 1,1$

Точка "Р" и принята в ГОСТ за расчетную. Необходимо отметить, что при большой скорости вращения при недогрузке в полюсе происходит перегрузка в районе двухпарного зацепления, т.е. в вершинах зубьев. В этом случае для динамического смещения в вершине зуба при очень большой скорости зацепления ($p_1 T_3/2 \rightarrow 0$) можно записать

$y_{qq} = \Delta y + y_0$. Подставляя выше приведенные зависимости для Δy и y_0 , получим следующее выражение для динамической нагрузки в двухпарном зацеплении

$$q_{qq} = C_2 \cdot y_{qq} = q \cdot \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot \left[1 - \frac{C_2}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \right].$$

Полная нагрузка на пару зубьев

$$q_{q \max} = q + q_{qq} = q \cdot \left\{ 1 + \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot \left[1 - \frac{C_2}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \right] \right\}.$$

Коэффициент динамичности в двухпарном зацеплении, а следовательно, и в вершине зуба $K_{vq} = \frac{q_{q \max}}{q} = 1 + \frac{C_2 - C_1}{C_1} \cdot \left[1 - \frac{C_2}{C_1} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1) \right]$.

В Европе $C_2/C_1 = 4/3$ и коэффициент динамичности в вершине зуба

$$K_{vq} = \frac{13 - \varepsilon_\alpha}{9}, \text{ а при } \varepsilon_\alpha \approx 1, K_{vq} \approx 1,33.$$

У нас $C_2/C_1 = 5/3$ и тогда $K_{vq} = \frac{19 - 4 \cdot \varepsilon_\alpha}{9}$, а при $\varepsilon_\alpha \approx 1$,

$K_{vq} \approx 1,67$. Таким образом в очень быстроходных идеальных передачах при недогрузке в полюсе зацепления происходит перегрузка в вершинах зубьев. Если учесть еще возможные параметрические неустойчивости при полуторных гармониках и при частоте зацепления в два раза больше собственных частот упругой системы в которую входят зубчатые колеса, мы предлагаем этот коэффициент, по крайней мере, не учитывать не в проектировочных не в проверочных расчетах до полного выяснения других динамических свойств зубчатой передачи, в которую она входит.