УДК 536.24

Г.А.Кулаков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

Интенсификация технологических процессов с целью повышения производительности труда достигается при механической обработке за счет форсирования элементов режима обработки, что приводит к росту теплонапряженности в зоне обработки. Негативным последствием концентрированного теплообмена является дестабилизация структурного состояния поверхностного слоя, а также повышенный износ режущего инструмента. Это, в свою очередь, существенно снижает долговечность деталей и приводит к более значительным потерям, чем выигрыш от экономии трудовых затрат. Снятие отмеченного противоречия выдвигает задачи управления теплообменом при механической обработке и проектирования высокоэффективных технологических процессов и конструкций лезвийного и абразивного инструмента.

Первая задача в работе решается посредством совершенствования расчетных методов путем учета при схематизации контактного теплообмена в системе твердых тел "обрабатываемая деталь - инструмент - стружка" взаимного влияния, геометрии и размеров контактных площадок. Согласование расчетных моделей лезвийной, абразивной и упрочняющей обработок достигается за счет решения задач контактного теплообмена на основе метода потенциала и соответствующих асимптотических методов.

Отличительным в рассматриваемой математической модели является исследование теплообмена в системе трех тел через общую контактную область (промежуточный слой), которая мала по сравнению с размерами самих тел.

Типология контактирующих тел (схематизация, правила описания, проверка гипотез), классификация источников и стоков тепла, действующих в технологических процессах, в данной работе принята аналогично данным в работах [1,2].

В контактной области выделяется тепло

$$Q(t) = A P_z v, \qquad (1)$$

где P_z - тангенциальная составляющая силы резания; v - скорость резания; A - механический эквивалент теплоты.

Тепловые потоки $Q_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, поглощаемые контактными площадками S_i, осредняются по площадкам контакта

$$q_i(M,t)=q_i(t);\ q_i(t)=\frac{Q_i(t)}{S_i},\quad M\in S_i. \tag{2}$$

Постулируется выполнение уравнения теплового баланса для зоны контакта $M\in S_i$ в виде

$$Q^*(t)=\sum_{i=1}^{n} S_i q_i(t)+h_i(t)[T(t)-\zeta(t)]+\ell(t)T'(t), \tag{3}$$

где $Q_n=\ell(t)T'(t)$ – тепловой поток, уходящий в промежуточный слой;

$h_i(t)$ – коэффициент теплообмена.

За контактную температуру для каждого тела принимается температура геометрического центра каждой контактной области.

В системе тел с общей поверхностью S, по которой движется промежуточный слой, тепловое поле в каждом теле $Q_i=Q_i(M,t)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}=\omega_i\,\Delta Q_i+\frac{\omega_i}{\lambda_i}\Psi_i \tag{4}$$

с начальными и граничными условиями

$$Q_i\Big|_{t=0}=\mu(M)-\lambda_i\frac{\partial Q_i}{\partial n}\Big|_S=h_i(\delta-T_i), \tag{5}$$

где $T_i=T_i(N,t)=Q_i|_S,\quad N\in S;$

λ_i,ω_i – коэффициенты тепло- и температуропроводности;

$\Psi_i=\Psi_i(M,t)$ – заданные плотности распределенных источников тепла.

Записав через $q_i=q_i(N,t)=-\lambda_i\frac{\partial Q_i}{\partial n}\Big|_S$ неизвестные тепловые потоки, соотношение (5) можно представить в виде

$$q_i(N,t)=h_i(N,t)[\delta(N,t)-T_i(N,t)] \tag{6}$$

На основании соотношений теплового баланса для промежуточного слоя будет выполняться уравнение

$$m\cdot\rho\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}+m\frac{\partial\delta}{\partial\ell}\right)+\sum_{i=1}^{n}S_i q_i=Q^*, \tag{7}$$

$$\delta|_{t=0} = \delta_1(N), \quad \delta|_{N=N_0} = \delta_2(t), \tag{8}$$

где $Q^* = Q(N,t)$ – количество тепла, выделяющегося на площадке S;

m – масса жидкости, соприкасающейся с единицей поверхности S;

ρ – удельная теплоемкость;

ℓ – направление касательной к поверхности.

Согласно общей теории уравнений теплопроводности температурные поля в телах можно представить в виде тепловых потенциалов простого слоя

$$Q_i(M,t) = \frac{\omega_i}{\lambda_i}\int_0^t d\tau \int_{S_i} q_i(N,\tau) C_{r_i}(M,N_0,t-\tau)dS + F_i(N,t), \tag{9}$$

где $C_{r_i}(M,N,t)$ – функция Грина второго ряда;

dS – элемент площадки контакта;

$M=(x,y,z)$ – точка наблюдения температуры;

$N=(x,y,z)$; $N, N_0 \in S$;

$$F_i(M,t) = \frac{\omega_i}{\lambda_i}\int_0^t d\tau \int_{\Omega} \Psi_i(M_0,\tau) C_{r_i}(M,M_0,t-\tau)d\Omega. \tag{10}$$

Полагая $M = N \in S$, получим

$$T_i(N,t) = \frac{\omega_i}{\lambda_i}\int_0^t d\tau \int_{S_i} q_i(N_0,\tau) C_{r_i}(N,N_0,t-\tau)dS + F_i(N,t) \tag{11}$$

Совокупность уравнений (6,7,10) на поверхности S представляет полную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций

$$T_i(N,t), \quad q_i(N,t); \quad \delta(N,t)$$

Приведенная система уравнений является Вольтерровского типа по времени t со слабой особенностью и Фредгольмского по координатам. В том случае, если температура среды задана, то уравнение (7) отпадает, и рассматривается интегральная система уравнений (6 и II).

При введенных предположениях о граничных и начальных условиях, балансе тепла, форме и расположении источников, а также геометрии контактирующих тел уравнение теплового баланса (3) примет вид

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i q_i(t) + \ell_0[\delta(t) - \tau(t)] + \ell\delta'(t), \tag{12}$$

где $\gamma(t)$ – температура на входе в контактную область;

ℓ_o – масса жидкости, проходящей в единицу времени через контактную поверхность.

Тепловые поля и контактные температуры для каждого тела, согласно выражениям (II), запишутся в виде

$$Q_i(M,t)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}\int_0^t q_i(\tau)J_i(M,t-\tau)d\tau+F_i(M,t), \qquad (13)$$

$$T_i(N,t)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}\int_0^t q_i(\tau)J_i(N,t-\tau)d\tau+F_i(N,t), \qquad (14)$$

здесь $J_i(M,t)=\int_{S_i} C_{r_i}(M,N_0,t)dS$ – осредненные тепловые потенциалы.

Температура в геометрическом центре каждой контактной области, а также тепловые потоки будут определяться соответственно как

$$T_i(t)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}\int_0^t q_i(\tau)J_i(t-\tau)d\tau+F_i(t), \qquad (15)$$

$$q_i(t)=h_i(t)[\delta(t)-T_i(t)], \qquad (16)$$

где $J_i(t)=J_i(0,t)$; $F_i(t)=F_i(0,t)$

Система уравнений (12,15,16), определяющая решение поставленной локальной контактной задачи, будет также Вольтерровского типа, что существенно упрощает анализ и решение этой системы.

Однако чтобы перейти к анализу теплофизической ситуации в зоне обработки, необходимо найти решение указанной системы интегральных уравнений.

Выбор методов решений интегральных уравнений определялся с учетом обеспечения численного решения для всей номенклатуры технологических операций, входящих в технологический маршрут изготовления высоконагруженных деталей авиационных агрегатов, таких как точение, шлифование сплошными и прерывистыми кругами, суперфиниширование и хонингование крупнозернистыми брусками, дробеструйная обработка. Поставленной цели соответствуют методы осреднения по времени – рекуррентный и операционный.

Приближенный метод решения системы уравнений предполагает рассмотрение процесса теплообмена за фиксированный промежуток времени $(0,t)$. Все тепловые потоки $q_i(t)$ и контактную температуру $T(t)$ осредняют за указанный промежуток времени $(0,t)$, но с изменением самого интервала эти постоянные будут меняться, поэтому приводимое ниже решение в какой-то мере улавливает нестационарность процесса. Этот метод предпочтительно применять для процессов теплообмена, у которых характерным является монотонное возрастание тепловых потоков до стационарного значения.

С учетом отмеченного система уравнений (15,16) примет вид

$$Q_i(M,t) = \frac{\omega_i}{\lambda_i} q_i(t) \Gamma_i(M,t) + F_i(M,t), \tag{17}$$

$$T_i(t) = \frac{\omega_i}{\lambda_i} q_i(t) \Gamma_i(t) + F_i(t), \tag{18}$$

где $\Gamma_i(M,t) = \int_0^t \varphi_i(M, t-\tau)\, d\tau, \quad \Gamma_i(t) = \Gamma_i(0,t)$ (19)

Применяя тот же принцип осреднения по времени к уравнению теплового баланса (12), имеем

$$Q^*(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i q_i(t) + \ell_0[\delta(t) - \xi(t)] + \ell\, \frac{\delta(t) - \delta_0}{t} \tag{20}$$

Система уравнений (17-20) представляет собой алгебраическую систему уравнений, решение которой можно представить в виде

$$q_i(t) = \Psi_i(t)[Q(t)h(t) - F_i(t)], \tag{21}$$

$$T_i(t) = \Psi_i(t)\, \frac{\omega_i}{\lambda_i} \Gamma_i(t)[Q(t)h(t) - F_i(t)] + F_i(t) \tag{22}$$

Здесь принято и обозначено

$$h(t) = [\ell_0 + \frac{\ell}{t} + \sum_{i=1}^{n} S_i \Psi_i(t)]^{-1};$$

$$\Psi_i(t) = h_i(t)[1 + \frac{\omega_i}{\lambda_i} h_i(t) \Gamma_i(t)]^{-1};$$

$$Q(t) = Q^*(t) + \ell_0 \xi(t) + \frac{\ell \delta_0}{t} + \sum_{i=1}^{n} S_i \Psi_i(t) F_i(t)$$

Тепловые поля в телах определяются по формулам

$$Q_i(M,t) = \frac{\omega_i}{\lambda_i} \Gamma_i(M,t) \Psi_i(t)[Q(t)h(t) - F_i(t)] + F_i(M,t) \tag{23}$$

Зависимость температуры среды от времени определяется по формуле

$$\delta(t) = Q(t)h(t) \tag{24}$$

Рекуррентный метод является более точным по сравнению с рассмотренным методом осреднения по времени и позволяет рассчитывать процесс теплообмена с любой степенью точности. В этом случае весь интервал времени $(0,t)$ разбиваем на n интервалов. Все неизвестные и известные функции ищем или представляем в виде ступенчатых функций

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[E(t-t_i)-E(t-t_{i+1})],$$

где $E(t)$ – единичная функция. Подставляя эти представления в систему (I5,I6), получаем

$$T_i(t_m)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}\sum_{j=0}^{m-1} q_i(t_j)\gamma_i(t_m,t_j),\quad i=1,\dots,n, \tag{25}$$

$$\delta(t_m)\Big[\sum_{i=1}^{n} S_i h_i(t_m)+\ell_0\Big]+\ell\,\frac{\delta(t_m)-\delta(t_{m-1})}{\Delta t_m}= \tag{26}$$
$$=Q(t_m)+\sum_{i=1}^{n} S_i h_i(t_m)T_i(t_m)+\ell_B(t_m),$$

$$q_i(t_m)=h_i(t_m)[\delta(t_m)-T_i(t_m)];\quad i=1,\dots,n, \tag{27}$$

где $\gamma_i(t_m,t_j)=\int_{t_j}^{t_{j+1}} \Gamma_i(t_m-\tau)d\tau$

Если функции $\Gamma_i(t)$ табулированы, то

$$\gamma_i(t_m,t_j)=\Gamma_i(t_m-t_{j-1})-\Gamma_i(t_m-t_j).$$

За первое приближение выбираем

$$T_i(t_0)=F_i(t_0);\quad \delta(t_0)=\delta_0,$$

$$q_i(t_0)=h_i(t_0)[\delta(t_0)-F_i(t_0)]. \tag{28}$$

Полагая в системе (25-27) t_m равным последовательно $t_1,\dots,t_m$, получаем систему рекуррентных формул треугольного вида, из каждой последовательно определяем $T_i(t_j)$; $q_i(t_j)$; $\delta(t_j)$. Результаты метода легко реализуются на ЭВМ.

Для случая постоянных коэффициентов теплообмена и переменного тепловыделения можно применять <u>операционный метод.</u> Применяя к уравнениям (I2,I5 и I6) преобразование Лапласа, получаем в изображениях

$$Q_i(M,P)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}(P)\Gamma_i(M,P)+F_i(M,P), \tag{29}$$

$$T_i(P)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}q_i(P)\Gamma_i(P)+F_i(P), \tag{30}$$

$$q_i(P)=h_i[\delta(P)-T(P)]; \tag{31}$$

$$Q^*(P)=\sum_{i=1}^{n} S_i q_i(P)+\ell_0\delta(P)+\ell p\delta(P)-\delta_0, \tag{32}$$

где $\Gamma_i(M,P)=\int_0^\infty e^{-pt}J(M,t)dt$ (33)

Система уравнений (29-32) имеет алгебраический вид, и ее решение может быть представлено следующим образом:

$$q_i(P)=\Psi_i(P)[Q(P)h(P)-F_i(P)],\quad \delta(P)=Q(P)h(P)\,, \tag{34}$$

$$T_i(P)=\Psi_i(P)\left[\frac{\omega_i}{\lambda_i}\Gamma_i(P)Q(P)h(P)+\frac{F_i(P)}{h_i}\right]. \tag{35}$$

Здесь обозначено $\Psi_i(P)=h_i\left[1+\frac{\omega_i}{\lambda_i}h_i\Gamma_i(P)\right]^{-1}$; $h(P)=\left[\sum_{i=1}^{n}S_i\Psi_i(P)+\ell P+\ell_0\right]^{-1}$,

$$Q(P)=Q^*(P)+\ell\delta_0+\ell_0 h(P)+\sum_{i=1}^{n}S_i\Psi_i(P)F_i(P) \tag{36}$$

Тепловые поля в изображениях примут вид

$$Q_i(M,P)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}\Psi_i(P)[Q(P)h(P)-F_i(P)]F_i(M,P)+F_i(M,P) \tag{37}$$

Для получения решения в оригиналах нужно к полученным формулам применить формулу обращения Римана-Мелина. Из полученного решения для определенных случаев можно получить стационарное решение. Например, если общее количество тепла, выделяющееся в единицу времени, постоянно $Q(t)=Q$, то согласно известному предельному соотношению $f(\infty)=\lim_{P\to 0}f(P)$, получим $q_i(\infty)=Qh(0)\Psi_i(0)$; $\delta(\infty)=Qh(0)$,

$$Q_i(r,\infty)=\frac{\omega_i}{\lambda_i}\Psi_i(0)\Gamma_i(r,0)h(0)Q\,, \tag{38}$$

где $\Psi_i(0)=\dfrac{h_i}{1+h_i\frac{\omega_i}{\lambda_i}\Gamma_i(0)}$; $h(0)=\left[\sum_{i=1}^{n}S_i\Psi_i(0)+\ell_0\right]^{-1}$

Особая ценность решения операционным методом заключается в возможности получения асимптотических выражений (с учетом формулы (33)). Применение формул численного обращения преобразования Лапласа позволяет получать приближенные решения с любой степенью точности

Таким образом, полученные математические модели позволяют управлять теплообменом при механической обработке и проектировать технологические процессы с учетом долговечности изделий.

Библиографический список

1. Кулаков Г.А. Исследование технологических и физических особенностей тонкого точения закаленных сталей резцами из эльбора-Р: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Куйбышев:КПтИ, 1974.

2. Аранзон М.А., Хорольский В.М., Кулаков Г.А. Исследование средней контактной температуры при точении//Новое в теории расчета и конструирования деформирующего и формообразующего инструмента: Межвуз.сб.науч.тр. Куйбышев, 1974.

30-693