КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

А. Д. Бойков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Динамика многих объектов управления нефтехимической, металлургической и других отраслей промышленности характеризуется зависимостью между несколькими входами и выходами объекта. Экспериментальное определение динамических характеристик таких многомерных объектов автоматического управления желательно производить по реализациям, соизмеримым с длительностью переходных процессов.

Определение текущих динамических характеристик многомерных объектов по коротким реализациям необходимо для построения аналитических (вычислительных) самонастраивающихся систем автоматического управления [1].

В работах [2], [3] В. В. Солодовниковым, А. Н. Дмитриевым, Н. Д. Егуповым разработан ортогональный метод моментов анализа и синтеза систем автоматического управления. В настоящей работе этот метод применен для идентификации линейных многомерных объектов автоматического управления по действующим на объект произвольным сигналам на коротком интервале времени, соизмеримом с длительностью переходных процессов.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА I РОДА В СВЕРТКАХ

Задача идентификации многомерных объектов автоматического управления сводится к решению системы интегральных уравнений типа Вольтерра I рода в свертках вида:

$$\sum_{q=1}^{r} \int_0^t k_q(\tau) y_{pq}(t-\tau)\,d\tau = x_p(t), \qquad (1)$$

$$(p = 1, 2, \ldots, r).$$

где $K_q(t)$ — искомые импульсные переходные функции:

$y_{pq}(t)$ и $x_p(t)$ — соответственно, реализации входных и выходных сигналов объекта управления, заданные на коротком интервале времени [O, T] соизмеримом с длительностью переходных процессов.

Индекс q означает номер входа многомерного объекта, индекс p номер реализации эксперимента.

Предполагается, что в уравнениях (1) свободная составляющая выходного сигнала исключена [4]. Тогда система (1) может быть решена методами теории преобразований Лапласа [5], [11].

Согласно теореме свертывания систему интегральных уравнений (1) можно представить в комплексной области в следующем виде:

$$\sum_{q=1}^{r} k_q(s)\, y_{pq}(s) = x_p(s), \tag{2}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, r),$$

где $k_q(s)$, $y_{pq}(s)$ и $x_p(s)$ преобразования Лапласа от соответствующих временных функций:

$$k_q(s) = \int_0^\infty k_q(t)\cdot e^{-st}\cdot dt, \tag{3}$$

$$y_{pq}(s) = \int_0^\infty y_{pq}(t)\cdot e^{-st}\cdot dt, \tag{4}$$

$$x_p(s) = \int_0^\infty x_p(t)\cdot e^{-st}\cdot dt. \tag{5}$$

Решая по правилу Крамера [6] систему (2), получим искомые импульсные переходные функции в комплексной области:

$$k_q(s) = \frac{D_q(s)}{D(s)}, \tag{6}$$

где $D(s)$ — определитель системы (2);

$D_q(s)$ — определитель, получающийся из определителя $D(s)$ путем замены в нем q-го столбца столбцом, составленным из функций $x_p(s)$ правой части системы (2).

Для нахождения решения системы (1) во временной области необходимо решить интегральное уравнение Лапласа:

$$k_q(s) = \int_0^\infty k_q(t)\cdot e^{-st}\cdot dt. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) связано с двойным переходом функций $y_{pq}(t)$ и $x_p(t)$, заданных графически, из временной области путем преобразований Лапласа в область комплексного переменного и наоборот нахождение искомых импульсных переходных функций $k_q(t)$ во временной области по известным преобразованиям Лапласа в комплексной области. Известно очень много приемов и методов решения уравнения (7), отличающихся различной степенью сложности, имеющих ограничения и точность решения [7], [8], [13]. Известны также и трудности, возникающие при этом, например, входные и выходные сигналы должны быть представлены в аналитической форме, теорема Хевисайда требует знания корней характеристического уравнения и имеет ограничения на существование особых точек и т. д.

Наиболее целесообразно для решения уравнения (7) применение разработанного В. В. Солодовниковым, А. Н. Дмитриевым, Н. Д. Егуповым ортогонального метода моментов [2]. Искомые импульсные функции k_q (t) будем искать в виде разложения по системе ортогональных функций Лягерра, преимущество которой по сравнению с другими ортогональными системами показано в работе [2,]:

$$k_q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{qi} L_i(t) \tag{8}$$

где $L_i(t)$ — функции Лягерра с весом

$$\delta(t) = e^{-\frac{gt}{2}}, \tag{9}$$

где g — масштабный коэффициент веса.

Коэффициенты $\{c_{qi}\}$ (ортогональные, спектральные характеристики), связаны с моментами импульсной переходной характеристики $\mu_\Theta^{k_q}(t)$ следующими соотношениями [2]:

$$
\begin{aligned}
C_{q_0} &= \mu_\Theta^{k_q(t)} \\
C_{q_1} &= \mu_\Theta^{k_q(t)} - g\mu_1^{k_q(t)} \\
C_{q_2} &= \mu_0^{k_q(t)} - 2g\mu_1^{k_q(t)} + \frac{1}{2!} g^2\mu_2^{k_q(t)} \\
C_{q_3} &= \mu_0^{k_q(t)} - 3g\mu_1^{k_q(t)} + \frac{3}{2!} g^2\mu_2^{k_q(t)} - \frac{1}{3!} g^3\mu_3^{k_q(t)} \\
C_{q_4} &= \mu_0^{k_q(t)} - 4g\mu_1^{k_q(t)} + \frac{6}{2!} g^2\mu_2^{k_q(t)} - \frac{4}{3!} g^3\mu_3^{k_q(t)} \frac{1}{4!} g^4\mu_4^{k_q(t)} \\
C_{q_5} &= \mu_0^{k_q(t)} - 5g\mu_1^{k_q(t)} + \frac{10}{2!} g^2\mu_2^{k_q(t)} - \frac{10}{3!} g^3\mu_3^{k_q(t)} + \\
&\quad + \frac{5}{4!} g^4\mu_4^{k_q(t)} \frac{1}{5!} g^5\mu_5^{k_q(t)}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

. . . .

. . . .

где $\mu_0^{k_q(t)}$ — моменты импульсной переходной функции, равные [12]

$$\mu_\Theta^{k_q(t)} = \int_0^\infty t^\Theta k_q(t) \cdot e^{-\frac{gt}{2}} \cdot dt \tag{11}$$

$$(\Theta = 0, 1, 2, \dots)$$

Далее рассмотрим метод вычисления моментов импульсных переходных функций $\mu^{k}_{\Theta q}{}^{(t)}$ по моментам входных и выходных сигналов.

С одной стороны зависимость между моментами функции и производными преобразования по Лапласу этой функции выражается следующими формулами [2]:

$$(-1)^{\Theta}\ \mu^{y}_{\Theta}{}_{pq}{}^{(t)} = \left[\frac{d^{\Theta}}{dS^{\Theta}}\, y_{pq}(s)\right]_{s=\frac{g}{2}}, \tag{12}$$

$$(-1)^{\Theta}\ \mu^{x}_{\Theta}{}_{p}{}^{(t)} = \left[\frac{d^{\Theta}}{ds^{\Theta}}\, x_{p}(s)\right]_{s=\frac{g}{2}}, \tag{13}$$

$$(-1)^{\Theta}\ \mu^{k}_{\Theta q}{}^{(t)} \left[\frac{d^{\Theta}}{ds^{\Theta}}\, k_{q}(s)\right]_{s=\frac{g}{2}}. \tag{14}$$

Если изображение функции по Лапласу имеет вид (6), то Θ-я производными преобразования по Лапласу этой функции выража- Ньютона-Лейбница [9] и имеет следующую рекуррентную формулу:

$$k_{q}^{(\Theta)}(s) = \frac{D_{q}^{(\Theta)}(s) - k_{q}(s)D^{(\Theta)}(s)}{D(s)} - \frac{1}{D(s)}\left[\Theta\cdot k_{q}'(s)\cdot D^{(\Theta-1)}(s) + \right.$$

$$\left. + \cdots + C_{\Theta}^{\varepsilon}\cdot k_{q}^{(\varepsilon)}(s)\,D^{\Theta-\varepsilon}(s) + \cdots + \Theta\, k^{(\Theta-1)}(s)\,D'(s)\right], \tag{15}$$

где $C_{\Theta}^{\varepsilon} = \dfrac{\Theta!}{(\Theta-\varepsilon)!\,\varepsilon!}$

Производные определителей $D(s)$ и $D_{q}(s)$ зависят от изображений по Лапласу и их производных входных и выходных сигналов и легко могут быть найдены после раскрытия определителей.

$$D^{(\Theta)}(s) = F_{1}\left[y_{pq}(s),\ y_{pq}'(s), \ldots,\ y_{pq}^{(\Theta)}(s)\right] \tag{16}$$

$$(p;\, q = 1,\ 2, \cdots,\ r)$$

$$D_{q}^{(\Theta)}(s) = F_{2}\left[y_{pq}(s), \ldots,\ y_{pq}^{(\Theta)}(s),\ x_{p}(s),\ x_{p}'(s), \ldots,\ x_{p}^{(\Theta)}(s)\right] \tag{17}$$

$$(p;\, q = 1, 2, \ldots,\ r)$$

Производные от изображений по Лапласу согласно (12); (13) заменим в (16), (17) соответствующими моментами входных и выходных сигналов

$$D^{(\Theta)}(s)\Big|_{s=\frac{g}{2}} = F_{1}\left[\mu^{y}_{0}{}_{pq}{}^{(t)},\ \ \mu^{y}_{1}{}_{pq}{}^{(t)},\ \ldots,\ \mu^{y}_{\Theta}{}_{pq}{}^{(t)}\right] \tag{18}$$

$$D_{q}^{(\Theta)}(s)\Big|_{s=\frac{q}{2}} = F_{2}\left[\mu^{y}_{0}{}_{pq}{}^{(t)};\ \mu^{y}_{1}{}_{pq}{}^{(t)};\ \ldots\ \mu^{y}_{\Theta}{}_{pq}{}^{(t)};\ \mu^{x}_{0}{}_{p}{}^{(t)}, \ldots,\ \mu^{x}_{\Theta}{}_{p}{}^{(t)}\right] \tag{19}$$

С другой стороны моменты входных и выходных сигналов могут быть вычислены по известным реализациям входных $y_{pq}(t)$ и выходных $x\ (t)$ сигналов по формулам:

$$\mu^{y}_{\Theta}{}_{pq}{}^{(t)} = \int_{0}^{\infty} t^{\Theta}\ y_{pq}\ (t)\,e^{-\frac{gt}{2}}\cdot dt. \tag{20}$$

$$\mu^{x}_{\Theta}{}_{p}{}^{(t)} = \int_{0}^{\infty} t^{\Theta}\, x_{p}\,(t)\cdot e^{-\frac{gt}{2}}\, dt. \tag{21}$$

Таким образом, моменты искомых импульсных функций рассчитываются по формулах (14), (15), (18), (19) по моментам входных и выходных сигналов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Многомерные объекты автоматического управления в общем виде имеют несколько входов и несколько выходов. Задача определения динамических характеристик объекта с многими входами и многими выходами сводится к задаче определения динамических характеристик объекта с многими входами и одним выходом [10].

Для линейного объекта управления с r входами и одним выходом, используя принцип суперпозиции, можно записать:

$$\sum_{q=1}^{r} \int_{0}^{t} k_q(\tau) y_q(t-\tau) d\tau = x(t) \tag{22}$$

Входные $y_q(t)$ и выходные $x(t)$ сигналы объекта (системы) снимаются экспериментально на коротком интервале времени [O, T], соизмеримом с длительностью переходных процессов в объекте. Для нахождения r искомых импульсных переходных функций $\kappa_q(t)$ необходимо иметь r интегральных уравнений (22). Эти уравнения могут быть получены путем экспериментального снятия входных и выходных сигналов r раз на одинаковых интервалах времени [O, T]. В результате будет получена система интегральных уравнений типа Вольтерра I рода в свертках:

$$\sum_{q=1}^{r} \int_{0}^{t} k_q(t) y_{pq}(t-\tau) \cdot d\tau = x_p(t), \tag{23}$$

$$(p = 1, 2, \dots, r).$$

Основой для определения динамических характеристик многомерного объекта автоматического управления является ортогональный метод моментов решения системы интегральных уравнений Вольтера I рода в свертках, рассмотренный выше.

На основании рассмотренного выше метода рассчитываются следующие динамические характеристики: моменты импульсных переходных функций $\mu_{\Theta}^{k_q(t)}$, ортогональные спектральные характеристики $\{C_q t\}$, импульсные переходные функции $\kappa_q(t)$.

Далее рассмотрим методы расчета коэффициентов передаточных функций многомерных объектов управления.

Согласно уравнению (22) выходной сигнал объекта управления является суммой составляющих выходных сигналов $x(t)$ от действия каждого входного сигнала $y_q(t)$ для каждой реализации

$$x(t) = \sum_{q=1}^{r} x_q(t), \tag{24}$$

где

$$x_q(t) = \int_0^t k_q(\tau)\, y_q(t-\tau)\, d\tau, \tag{25}$$

Зная моменты входного сигнала и импульсной переходной функции, рассчитываются моменты составляющих выходного сигнала $\mu_\Theta^{x_q(t)}$ по формуле [2]:

$$\mu_\Theta^{x_q(t)} = \mu_0^{y(t)} \cdot \mu_\Theta^{k_q(t)} + \sum_{u=0}^{\Theta-1} \frac{\Theta!}{(\Theta-u)!\,u!}\, \mu_{\Theta-u}^{y_q(t)} \cdot \mu_u^{k_q(t)} \tag{26}$$

Передаточную функцию по каждому из входов и выходов многомерного объекта будем искать в виде дробно-рациональной функции

$$W_q(s) = \int_0^\infty k_q(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{N_q(s)}{M_q(s)}, \tag{27}$$

где

$$N_q(s) = \sum_{i=0}^{m_q} b_{qi}\, s^i \tag{28}$$

$$M_q(s) = \sum_{i=0}^{n_q} a_{qi}\, s^i\ . \tag{29}$$

Коэффициенты $\{a_{qi}\}$ связаны с моментами $\{\mu_i^{y_q(t)}\}$ следующими соотношениями [2]:

$$a_{q_{n_q}} = (-1)^{n_q} \cdot \frac{1}{n_q!}\, \mu_{n_q}^{y_q(t)}$$

. . . .

$$a_{q_v} = (-1)^v \cdot \frac{1}{v!}\, \mu_v^{y_q(t)} - \sum_{i=v+1}^{n_q} \frac{i!}{(i-v)!\,v!}\, a_{q_i}\, C^{i-v} \tag{30}$$

. . . .

$$a_{q_0} = \mu_0^{y_q(t)} - \sum_{i=1}^{n_q} a_{q_i}\, C^i \tag{31}$$

где $C = \frac{g}{2}$.

Аналогично связаны $\{b_{q_i}\}$ и $\{\mu_i^{x_q(t)}\}$. Таким образом коэффициенты передаточных функций согласно (30) определяются по моментам входных сигналов, найденным по формулам (20) и моментам составляющих выходных сигналов, найденных по формулам (26).

На практике определение динамических характеристик объекта управления не представляет собой полностью проблемы «черного ящика». Практический интерес представляет определение коэффициентов дробно-рациональных передаточных функций вида (27) с заранее известным порядком числителя m и знаменателя n для каждого канала. В этом случае для определения коэффициентов передаточных функций целесообразно применить априорный метод моментов [2]:

Для многомерного объекта управления вычисляя для каждой составляющей выходного сигнала одной и той же реализации моменты выходного сигнала

$$\mu_{0}^{x_q(t)}\Big|_{c=C_j} = \mu_{c_j}^{x_q(t)} = \int_0^{\infty} x_q(t)\cdot e^{-c_j t}\cdot dt \tag{32}$$

и моменты входного сигнала

$$\mu_{0}^{y_q(t)}\Big|_{c=C_j} = \mu_{c_j}^{y_q(t)} = \int_0^{\infty} y_q(t)\cdot e^{-c_j t}\cdot dt \tag{33}$$

и используя зависимость между моментами и производными передаточной функции (12) — (14), можем составить r систем неоднородных алгебраических уравнений.

$$\frac{\mu_{c_j}^{x_q(t)}}{\mu_{c_j}^{y_q(t)}}\sum_{i=0}^{n_q} a_{qi}C_j - \sum_{i=0}^{m_q} b_{qi}C_j = 0. \tag{34}$$

$$[j = 1, 2, \ldots, (n_q + m_q + 2)]$$
$$(q = 1, 2, \ldots, r).$$

Для решения каждой из систем алгебраических уравнений (34), выбирая

$$j > n_q + m_q + 2 \tag{35}$$

для одних и тех же записей входных и выходного сигналов, можно использовать метод наименьших квадратов, что приводит к уменьшению влияния различного рода ошибок (ошибки измерения, шумы, ошибки интегрирования и т д.) на точность решения [2].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос решения системы интегральных уравнений типа Вольтерра I рода в свертках ортогональным методом моментов и на основе этого предложены методы определения динамических характеристик (идентификация) многомерных объектов автоматического управления: моментов импульсных переходных функций; ортогональных спектральных характеристик; импульсных переходных функций; коэффициентов передаточных функций (объект рассматривается как «черный ящик»); коэффициентов передаточных функций априорным методом моментов (известен порядок числителя и знаменателя передаточных функций).

ЛИТЕРАТУРА

1. «Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления» под ред. В. В. Солодовникова, Машиностроение, 1965.

2. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов «Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов» в сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника» № 8, Машиностроение, 1966.

3. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. «Идентификация линейных объектов автоматического управления ортогональным методом моментов». Труды III Международного конгресса ИФАК, Лондон, 1966.

4. А. Н. Дмитриев, В. В. Решетов. «Ортогональный метод определения текущих динамических характеристик и построения корректирующих фильтров аналитических самонастраивающихся систем автоматического управления». Сб. «Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления» под ред. В. В. Солодовникова, Машиностроение, 1965.

5. Ф. Трикоми. Интегральные уравнения, ИИЛ, 1960.

6. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. ГИТТЛ, 1956.

7. М. И. Конторович. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. Изд. «Наука», 1964.

8. В. А. Диткин и А. П. Прудников. Операционное исчисление. Изд. «Высшая школа», 1966.

9. Б. Н. Добжинский. Условия неискаженного воспроизведения сигнала на выходе фильтра с сосредоточенными постоянными. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 10, 1965.

10. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.

11. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. ГИТТЛ, 1957.

12. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. Физматгиз, 1961.

13. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. Изд. «Наука», 1965.