КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

В. С. ИВЛЕНТИЕВ, О. Ф. МЕНЬШИХ, Г. В. ФИЛИППОВ

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ СОСУДА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПРОТИВОДАВЛЕНИИ

Задача об истечении газа из сосуда при постоянном противодавлении решалась неоднократно [1, 2, 4 и др.]. Ниже предлагается решение аналогичной задачи при переменном противодавлении $p_н$.

Пусть газ вытекает из сосуда объемом V через отверстие с проходным сечением площадью F и коэффициентом расхода μ в среду с переменным давлением p_y. Для конкретности примем, что сосуд падает в стратосфере с постоянной скоростью v_y. Тогда давление p_t будет меняться в соответствии с формулой Галлея:

$$p_н = p_{11} e^{-\frac{H_0 - 11000 - v_y t}{6350}}, \tag{1}$$

где p_{11} — атмосферное давление на высоте 11 *км*;

H_0 — начальная высота.

Предполагая процесс расширения газа изотермическим и используя гипотезу стационарности, дифференциальное уравнение, описывающее изменение давления в сосуде с течением времени, изобразим в виде [3]:

$$dt = -\frac{V}{RT}\frac{dp}{G}. \tag{2}$$

Здесь R — газовая постоянная;

T — температура газа в сосуде;

G — секундный расход газа, определяемый уравнениями: для закритического перепада

$$G_{закр} = \frac{F\mu\psi}{\sqrt{RT}} p;$$

для докритического

$$G_{докр} = 0{,}95 F\mu \sqrt{\frac{3g}{kRT}} \sqrt{p_н (p - p_н)},$$

где k — показатель адиабаты.

$$\psi = \sqrt{2g \frac{k}{k+1}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}},$$

(при $k = 1,4$ и $g = 9,8$ *м/сек*^{2}, $\psi = 2,15$).

Для удобства записи введем обозначения:

$$\alpha = \frac{V}{RT};\quad A_{\text{закр}} = \frac{F\mu\psi}{\sqrt{RT}};\quad A_{\text{докр}} = 0,95F\mu\sqrt{\frac{3g}{kRT}}.$$

Пусть в начальной момент времени $\left(\frac{p}{p_{\text{н}}}\right)_0 > 1,89$; т. е. процесс истечения будет закритическим.

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$dt = -\frac{\alpha}{A_{\text{закр}}}\frac{dp}{p}. \tag{3}$$

Интегрирование его, как известно, дает [4]:

$$t = \frac{\alpha}{A_{\text{закр}}}\ln\frac{p_0}{p} \quad \text{и} \quad t_{\text{закр}} = \frac{\alpha}{A_{\text{закр}}}\ln\frac{p_0}{p_{\text{кр}}}. \tag{4}$$

Так как при закритическом истечении газа расход не зависит от противодавления, вполне естественно, что давление в сосуде в рассматриваемом случае меняется по тому же закону, что и в случае $p_{\text{н}} = \text{const}$.

Однако, при падении сосуда атмосферное давление возрастает, поэтому увеличивается и критическое давление $p_{\text{кр}} = 1,89p_{\text{н}}$ а время закритического истечения несколько уменьшается.

Разрешая уравнение (4) относительно $p_{\text{кр}}$, имеем:

$$p_{\text{кр}} = p_0 e^{-\frac{A_{\text{закр}}}{\alpha}t_{\text{закр}}}. \tag{5}$$

Записав условие $p_{\text{кр}} = 1,89p_{\text{н}}$ с учетом (4), (5) и (1) и разрешив его относительно $p_{\text{кр}}$ находим:

$$p_{\text{кр}} = 1,89p_{\text{Н}_0}\left(\frac{p_0}{1,89p_{\text{Н}_0}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{6350A_{\text{закр}}}{\alpha V_y}}}$$

или

$$p_{\text{кр}} = p_{\text{кр}\,\text{Н}=\text{Н}_0}\left(\frac{p_0}{p_{\text{кр}\,\text{Н}=\text{Н}_0}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{6350A_{\text{закр}}}{\alpha V_y}}}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (4) может быть записано в виде:

$$t_{\text{закр}} = \frac{\alpha}{A_{\text{закр}}}\ln\left(\frac{p_0}{1,89p_{\text{Н}_0}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{v_y\alpha}{6350A_{\text{закр}}}}} \tag{7}$$

или

$$t_{\text{закр}} = t_{\text{закр}\,\text{Н}=\text{Н}_0}\frac{1}{1+\frac{v_y\alpha}{6350A_{\text{закр}}}} = \beta_{\text{закр}}\,t_{\text{закр}\,\text{Н}=\text{Н}_0}.$$

Далее процесс истечения становится докритическим, уравнение (2) нелинейным:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{A_{\text{докр}}}{\alpha} \sqrt{p_{\text{н}}(p - p_{\text{н}})}. \qquad (8)$$

Введение новой переменной $u = \sqrt{\frac{p}{p_{\text{н}}} - 1}$ приводит уравнение (8) к виду

$$2u \frac{du}{dt} + \frac{1}{p_{\text{н}}} \cdot \frac{dp_{\text{н}}}{dt} (u^2 + 1) + \frac{A_{\text{докр}}}{\alpha} u = 0. \qquad (9)$$

Полагая, что $p_{\text{н}}$ по-прежнему определяется уравнением (1), находим, что

$$\frac{1}{p_{\text{н}}} \cdot \frac{dp_{\text{н}}}{dt} = \frac{v_y}{6350} = \bar{v}_y = \text{const} \qquad (10)$$

и задача сводится к квадратуре:

$$t = -\frac{2}{\bar{v}_y} \int\limits_{u_0}^{u} \frac{u}{u^2 + mu + 1}\, du, \qquad (11)$$

где $m = \frac{A_{\text{докр}}}{\alpha \bar{v}_y}$.

выполняя (11), находим:

$$t = -\frac{1}{\bar{v}_y} \left[\ln \frac{u^2 + mu + 1}{u_0^2 + mu_0 + 1} - \frac{m}{\sqrt{m^2 - 4}} \ln \frac{(2u + m - \sqrt{m^2-4})(2u_0 + m + \sqrt{m^2-4})}{(2u + m + \sqrt{m^2-4})(2u_0 + m - \sqrt{m^2-4})} \right] \qquad (12)$$

Решая трансцендентное уравнение (12), можно построить зависимость $p(t)$. Однако, если требуется определить только полное время докритического истечения, то уравнение (12) оказывается разрешенным относительно $t_{\text{докр}}$.

В самом деле:

$$\text{при } t = 0 \quad u = u_0 = \sqrt{\frac{p_0}{p_{\text{н}_0}} - 1}, \qquad (13)$$
$$t = t_{\text{докр}} \quad u = 0.$$

т. к. в конце истечения $p = p_{\text{н}}$.

Процесс истечения считаем окончившимся, когда $p = p_{\text{н}}$, следующий за этим моментом процесс втекания газа в сосуд из атмосферы не рассматриваем.

При граничных условиях (13) уравнение (12) принимает вид:

$$t_{\text{докр}} = \frac{1}{\bar{v}_y} \left[\ln (u_0^2 + mu_0 + 1) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{m}\right)^2}} \ln \frac{\dfrac{2u_0}{m\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{m}\right)^2}\right]} + 1}{\dfrac{2u_0}{m\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2}{m}\right)^2}\right]} + 1} \right] \qquad (14)$$

Поскольку величина $\frac{2}{m}$ весьма мала, то разлагая $\sqrt{1-\left(\frac{2}{m}\right)^2}$ в быстросходящийся ряд, получим более удобную для вычислений форму записи этого уравнения:

$$t_{скр} = \frac{1}{v_y}\left\{\ln\left(u_0^2 + m u_0 + 1\right) + \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{m}\right)^4\right]\ln \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\dfrac{2u_0}{m\left[2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{m}\right)^4\right]} + 1}{\dfrac{2u_0}{m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{m}\right)^4\right]} + 1}\right\}. \tag{15}$$

Проведенные по уравнениям (6, 7, 15) расчеты при следующих значениях параметров и начальных условиях: $\frac{A_{докр}}{a} = 0{,}7$; $\frac{A_{закр}}{a} = 0{,}407$; $p_0 = 0{,}861$ *кг/см²*; $p_{H_0} = 0{,}0553$ *кг/см²* иллюстрированы таблицей 1. Там же приведены значения потерянной за время истечения высоты ΔH.

Таблица 1

$v_y\ \frac{м}{сек}$	50	100	200	400	600	800	1000
$\beta_{закр} = \frac{t_{закр}}{t_{закр\ H-H_0}}$	0,978	0,960	0,925	0,863	0,809	0,761	0,72
$\beta_{докр} = \frac{t_{докр}}{t_{докр\ H-H_0}}$	0,993	0,914	0,907	0,788	0,720	0,653	0,601
ΔH *м*	540	1010	1980	3440	4700	5690	6550

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Т. Быков. Приближенное определение площади проходного сечения крана аварийного сброса давления. Труды МАИ, вып. 143, 1961.
2. А. М. Гершкович. Метод расчета времени истечения газа из резервуара постоянного объема. «Кислород». № 1, 1948.
3. В. С. Ивлентиев. Г. В. Филиппов. Исследование перетекания газа в сообщающихся сосудах. Известия ВУЗов, серия «Авиационная техника», № 2, 1963.
4. Б. И. Якимович. Теоретическое исследование истечения воздуха из герметических кабин. Труды МАИ, вып. IX, 1948.