КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ, ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

Л. И. КУДРЯШЕВ, А. А. ПАВЛЕНКОВ

ОБТЕКАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ДОЗВУКОВЫМ ВНЕШНИМ ПОТОКОМ

Для решения задачи воспользуемся уравнением неразрывности в координатах: дуга — s, нормаль — n.

$$\frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s H_2)+\frac{\partial}{\partial n}(\rho V_n H_1)\right]=0,$$

$$H_1=1+\frac{n}{r},\quad H_2=1,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\rho V_n)+\frac{(\rho V_n)}{(r+n)}+\frac{r}{(r+n)}\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s)=0, \tag{1}$$

где r — радиус кривизны в данной точке контура.

В результате решения дифференциального уравнения (1) получим:

$$\rho V_n=-\frac{r}{(r+n)}\int_0^n\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s)\,dn, \tag{2}$$

так как при $n=0$, $V_n=0$.

Величину касательной скорости V_s представим в виде полинома.

$$V_s=\frac{\rho_\infty}{\rho}V_\infty\left[A_0+A_1\frac{r}{(r+n)}+A_2\frac{r_2}{(r+n)^2}+\cdots+A_k\frac{r^k}{(r+n)^k}+f(s,\ n)\right]; \tag{3}$$

$$f(s,\ \delta)=0,\ \frac{\partial^j f}{dn^j}(s,\ \delta)=0.$$

Подставляя полином (3) в выражение (2) и имея в виду, что при $n\to\infty$.

$$V_s=V_\infty\sin\Theta,\quad V_n=-V_\infty\cos\Theta,\quad \rho\to\rho_\infty,\quad A_0=\sin\Theta.$$

(где Θ угол между обращенным вектором скорости набегающего потока V_∞ и внешней нормалью к поверхности профиля в данной точке) получим:

$$\frac{\partial}{\partial s}(A_2 r) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(A_3 r) + \cdots \frac{1}{(k-1)}\frac{\partial}{\partial s}(A_k r) +$$

$$+ \int_0^n \frac{\partial j(s, n)}{\partial n}\, dn = \frac{\partial A_0}{\partial s}\, r, \tag{4}$$

$$A_1 \cdot r = \text{const}.$$

$$A_2 r + \frac{1}{2} A_3 r + \cdots \frac{1}{(k-1)} A_k r + \int_0^s \left[\int_0^n \frac{\partial j}{\partial s}(s, n)\, dn\right] ds =$$

$$= \int_0^s \frac{\partial A_0}{\partial s} r ds + C.$$

При $s = 0$, $V_s = 0$.

$$C = A_2(0) r_0 + \frac{1}{2} A_3(0) r_0 + \cdots \frac{1}{(k-1)} A_k(0) r_0.$$

На основании (3) при $s = 0$, $V_s = 0$ имеем:

$$A_1(0)\frac{r_0}{(r_0+n)} + A_2(0)\frac{r_0^2}{(r_0+n)^2} + A_3(0)\frac{r_0^3}{(r_0+n)^3} + \cdots$$

$$+ A_k(0)\frac{r_0 k}{(r_0+n)^k} = 0,$$

$$n = n_1, \quad n_2, \ldots n_k$$

$$A_1(0) = 0, \quad A_2(0) = 0, \ldots A_k(0) = 0.$$

$$A_2 + \frac{A_3}{2} + \cdots \frac{A_k}{(k-1)} + \frac{1}{r}\int_0^s \left[\int_0^n \frac{\partial j(s_1 n)}{\partial S}\, dn\right] ds =$$

$$= \frac{1}{r}\int_0^s \frac{\partial A_0}{\partial s}\, ds. \tag{5}$$

Остальные уравнения для определения коэффициентов найдем из условий $\frac{\partial V_s}{\partial n}(\delta) = 0$, $\frac{\partial^2 V_s}{\partial n^2}(\delta) = 0$.

Итак, для определения коэффициентов A_k имеем следующую систему уравнений

$$A_2 + \frac{A_3}{2} + \cdots + \frac{A_k}{(k-1)} = \frac{1}{r}\int_0^s \frac{\partial A_0}{\partial S} r ds,$$

$$A_2\left[\frac{2r^2}{(r+\delta)^3}+\frac{1}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}\delta\frac{r^2}{(r+\delta)^2}\right]+$$

$$+A_3\left[\frac{3r^3}{(r+\delta)^4}+\frac{1}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\frac{r^3}{(r+\delta)^3}\right]+\cdots \tag{6}$$

$$+A_k\left[\frac{kr^k}{(r+\delta)^{k+1}}+\frac{1}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]=-$$

$$-\frac{1}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)A_0;$$

$$A_2\left\{\frac{6r^2}{(r+\delta)^4}+\frac{2}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\frac{2r^2}{(r+\delta)^3}+\frac{2}{\rho^2(\delta)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}\delta\right]^2\frac{r^2}{(r+\delta)^2}\right\}+$$

$$+A_3\frac{12r^3}{(r+\delta)^5}+\frac{2}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\frac{3r^3}{(r+\delta)^4}+\frac{2}{\rho^2(\delta)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\right]^2\frac{r^3}{(r+\delta)^3}\bigg\}+$$

$$+\cdots A_k\left\{\frac{(k+1)kr^k}{(r+\delta)^{k+2}}+\frac{2}{\rho(\delta)}\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\frac{kr^k}{(r+\delta)^{k+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\rho^2(\delta)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}(\delta)\right]^2\frac{r^{k^2}}{(r+\delta)^k}\right\}=-\frac{2}{\rho^2(\delta)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial n}\delta\right]^2A_0;$$

или

$$A_2+\frac{A_3}{2}+\cdots\frac{A_k}{(k-1)}\approx-\frac{1}{r}\int_0^s\frac{\partial A_0}{\partial s}\,rds,$$

$$2A_2+3A_3\frac{r}{(r+\delta)}+4A_4\frac{r^2}{(r+\delta)^2}\approx 0,$$

$$6A_2+12A_3\frac{r}{(r+\delta)}+20A_4\frac{r^2}{(r+\delta)^2}\approx 0. \tag{6а}$$

Определив на основании решения системы уравнений (6) и (6а) коэффициенты A_k будем иметь выражения для касательной и нормальной (на основании выражения (2) составляющих скоростей. Положение передней критической точки определяется из условия $-\frac{1}{r}\int_0^S\frac{\partial A_0}{\partial S}\,rdS=0,$

где S_0 — длина дуги профиля;

$в$ — хорда;

$S_0\approx в$.

Зная выражение для касательной составляющей скорости, можно определить распределение давления по профилю, а следовательно, подъемную силу и силу лобового сопротивления. Действительно

$$V_s(\delta)=\frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}V_\infty\left[A_0+A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2}+\cdots A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right];$$

$$P_\infty+\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}=P(\delta)+\frac{\rho(\delta)V^2(\delta)}{2},$$

$$P_\infty+\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}=P(\delta)+\frac{\rho(\delta)}{2}\frac{\rho_\infty^2}{\rho^2(\delta)}V_\infty^2\left[A_0+A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2}+\right.$$

$$\left.+A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3}+\cdots A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]^2;$$

$$P(\delta) - P_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\left\{1 - \frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}\left[A_0 + A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3} + \cdots A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]\right\};$$

$$Y = \oint_s (P(\delta) - P_\infty] \cos\varphi\, ds$$

$$Y = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\oint_{\frac{s}{b}}\left\{1 - \frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}\left[A_0 + A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2} + A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]^2\right\}\cos\varphi\, ds + \oint_{\frac{s}{b}} \tau \sin\psi\, ds; \qquad (7)$$

$$Q = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\oint_{\frac{s}{b}}\left\{1 - \frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}\left[A_0 + A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3} + \cdots A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]\right\}\sin\varphi\, ds +$$

$$+ \int_{\frac{s}{b}} \tau\cos\psi\, ds;$$

$$C_y = \oint_{\frac{s}{b}}\left\{1 + \frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}\left[A_0 + A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2} + A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3} + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]^2\right\}\cos\varphi\, d\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{1}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}}\int_{\frac{s}{b}} \tau\sin\psi\, d\left(\frac{s}{b}\right);$$

$$C_x = \oint_{\frac{s}{b}}\left\{1 - \frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}\left[A_0 + A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2} + A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3} + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]^2\right\}\sin\varphi\, d\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{1}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}}\int_{\frac{s}{b}} \tau\cos\psi\, d\left(\frac{s}{b}\right); \qquad (8)$$

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = \oint_{\frac{s}{b}} \frac{\rho_\infty}{\rho^2(\delta)}\frac{d\rho}{d\delta}(\delta)\frac{d\delta}{dT_0}\frac{dT_0}{d\alpha}\left[A_0 + A_2\frac{r^2}{(r+\delta^2)} + A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^3} + \right.$$

$$\left. + \cdots + A_k\frac{r^k}{(r+\delta)^k}\right]\cos\varphi\, d\left(\frac{s}{b}\right) + \oint_{\frac{s}{b}}\frac{\rho_\infty}{\rho(\delta)}\left[2A_2\frac{r^2}{(r+\delta)^2} + \right.$$

$$\left. + 3A_3\frac{r^3}{(r+\delta)^4} + \cdots kA_k\frac{r^k}{(r+\delta)^{k+1}}\right]\cos\varphi\,\frac{d\delta}{d\alpha}\, d\left(\frac{s}{b}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}}\frac{d}{d\alpha}\int_{\frac{s}{b}} \tau\sin\psi\, d\left(\frac{s}{b}\right). \qquad (9)$$

На основании выражений (8) и (9) видим, что с изменением толщины пограничного слоя δ величины C_y, C_x и $\frac{dc_y}{d\alpha}$, а также $\frac{dc_x}{d\alpha}$ могут в значительной степени изменяться, что подтверждается экспериментально.

Применение этого метода для решения задачи обтекания плоской пластинки изотермическим потоком дало следующие результаты: аэродинамические коэффициенты $C_y = 4\cos^2\alpha \sin\alpha$, $C_x = 4\sin^2\alpha \cos\alpha$, критический угол атаки $\alpha_{kp} = 35^\circ$ центр давления $\overline{x_1} = \frac{x_1}{b} = \frac{1}{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. I и II, 1948.
2. А. П. Мартынов. Экспериментальная аэродинамика, 1950.