

Н. В. КЛИЕНТОВ, А. В. ГРЕКОВ

ПРОФИЛИ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУР В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассматриваются возможности моделирования на машине ИПТ-5, с последующим просчетом на ЭВМ «Урал-1», задачи о распространении вдоль плоской стенки осесимметричной ламинарной струи, бьющей из радиального диффузора, при постоянных и переменных теплофизических характеристиках.

§1. При постоянных теплофизических характеристиках гидродинамическая и тепловая задачи определяются системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rV_z)}{\partial z} &= 0; \\ V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Граничные условия зададим в виде

$$\left. \begin{aligned} V_r = 0, \quad V_z = 0, \quad T = T_\infty, \quad \text{при } z = 0; \\ V_r = 0, \quad T = 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Отыскание решения гидродинамической задачи, отличного от тривиального нулевого решения, как известно, связано с выполненном условии

$$E = \int_0^{\infty} r V_r^2 \left(\int_0^z r V_r dz \right) dz = \text{const.} \quad (1.3)$$

Чтобы удовлетворить уравнению неразрывности, введем функцию тока $\psi(r, z)$ меридионального течения

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.4)$$

При этом функцию ψ , следуя М. С. Цуккеру [1], будем отыскивать в виде

$$\psi = Ar^2 F(\xi), \quad (1.5)$$

где $\xi = \frac{1}{\alpha} z r^2$ - новая переменная;
 A, α, β - постоянные.

Если соответствующие значения скорости и ее производных подставить в первое уравнение системы (1.1) и условие (1.3), то решение гидродинамической задачи при постоянных теплофизических константах сведется к интегрированию уравнения

$$F''' + \frac{3}{4} F F'' + \frac{3}{2} F'^2 = 0 \quad (1.6)$$

при интегральном условии

$$I = \int_0^{\infty} F F'^2 d\xi = \text{const} \quad (1.7)$$

и граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} F = 0, \quad F' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \\ F' = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

В случае постоянства температуры стенки, исходя из физических соображений, можно положить

$$T = T_w f(\xi). \quad (1.9)$$

Тогда решение тепловой задачи сведется к интегрированию уравнения

$$f'' + \frac{3}{4} \alpha f' T = 0 \quad (1.10)$$

при граничных условиях

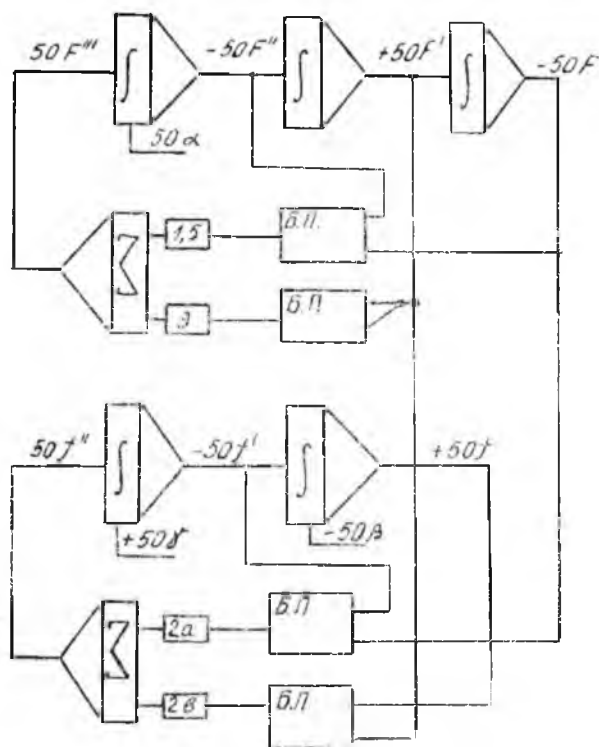
$$f = 1, \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad f = 0, \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

Решение уравнений (1.6) и (1.10) было проведено на вычислительной машине непрерывного действия ИПТ-5. Блок-схема задачи представлена на фиг. 1. Результаты решения даны на фиг. 2. Штрих-пунктиром изображен профиль скорости. Сплошными линиями 1, 2 показаны профили температуры, соответствующие числам $\alpha = 0,68$ и $0,97$. Для сравнения значком Δ отмечены отдельные расчетные точки, полученные Л. А. Вулисом и А. Т. Трофименко [2], а пунктиром представлены расчетные профили температуры для тех же чисел Прандтля при аппроксимации скоростей полиномом второй степени, а поля температур — полиномом третьей степени*.

* См. статью: П. В. Кленятов. Распространение осесимметричной ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль плоской стенки. Постоянный сборник, стр. 78.

§2. Гидродинамическая и тепловая задачи о распространении ламинарной струи, бьющей из радиального диффузора при переменных теплофизических константах определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r V_z)}{\partial z} &= 0; \\ \rho \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (2.1)$$



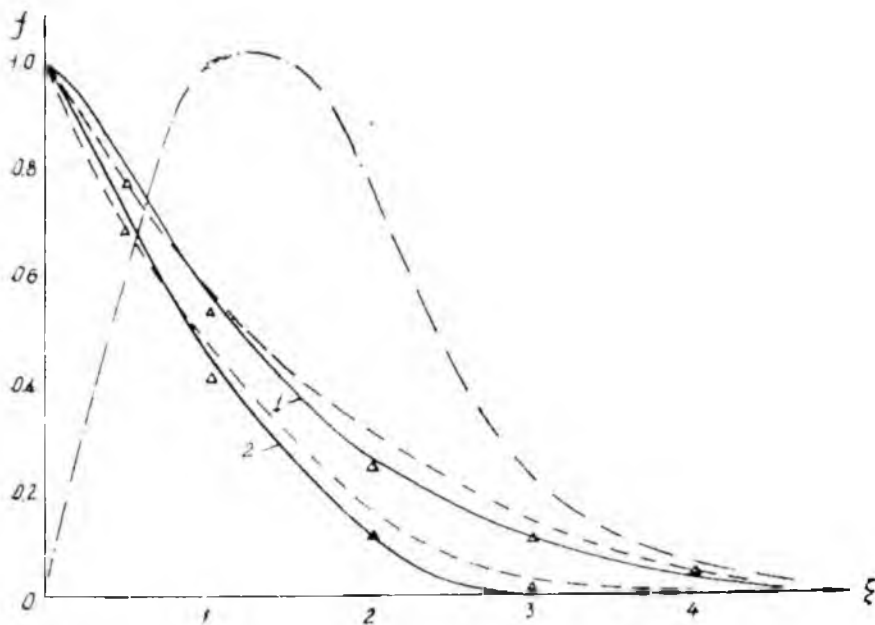
Фиг. 1.

Полагая

$$\eta = \text{const}, \quad \mu = \mu_{\infty} \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} &= v_\infty \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n \frac{\partial V_r}{\partial z} \right]; \\ \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rV_z)}{\partial z} &= 0; \\ V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{v_\infty}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n \frac{\partial T}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$



Фиг. 2.

Если, как и в предыдущем случае постоянства теплофизических констант, ввести функции $F(\xi)$ и $f(\xi)$, то поставленная задача сведется к решению системы

$$\left. \begin{aligned} F'''' &= -(1,5F'^2 + 0,75FF'') \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{-n} + \\ &+ n \left(\frac{T_{20}}{T_\infty} - 1 \right) \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{-1} f' F'; \\ f' &= \sigma \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{-n} \left[-0,75f' F + r \frac{\partial T_w}{\partial r} \frac{(1-f)F'}{T_\infty - T_w} \right] + \\ &+ n \left(\frac{T_{20}}{T_\infty} - 1 \right) \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{-1} f'^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где

$$T = T_{\omega}(r) + (T_{\infty} - T_{\omega})f.$$

Граничные условия примут вид

$$\left. \begin{aligned} F = 0, \quad F' = 0, \quad f = 0; \quad \text{при } \xi = 0; \\ F' = 0, \quad f = 1, \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Очевидно, что система (2.4) не будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений, если T_{ω} считать произвольной функцией от r . Но в некоторых случаях, когда $T_{\omega}(r)$ имеет вполне определенный вид, система (2.4) при $n=0,76$ (или $n=0$) будет вполне определенной системой.

Рассмотрим два случая.

1) Положим

$$n = 0, \quad T_{\omega} = T_{\infty} + kr^{-\beta}, \quad (2.6)$$

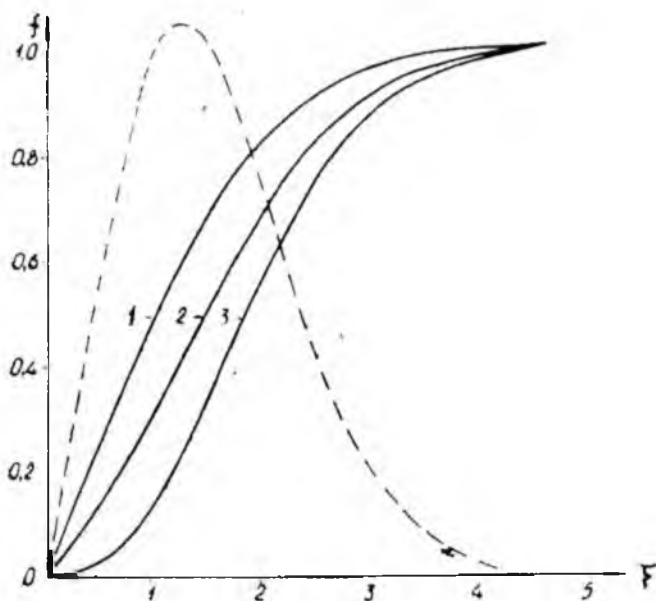
где k и β — некоторые неотрицательные числа, определяющие распределение температуры в области $z = 0$ ($r > 0$).

В этом случае система (2.4) примет вид

$$\left. \begin{aligned} F''' = -(1,5 F'^2 + 0,75 FF''); \\ f'' = -\sigma [0,75 f' F + (f - 1)\beta F'] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

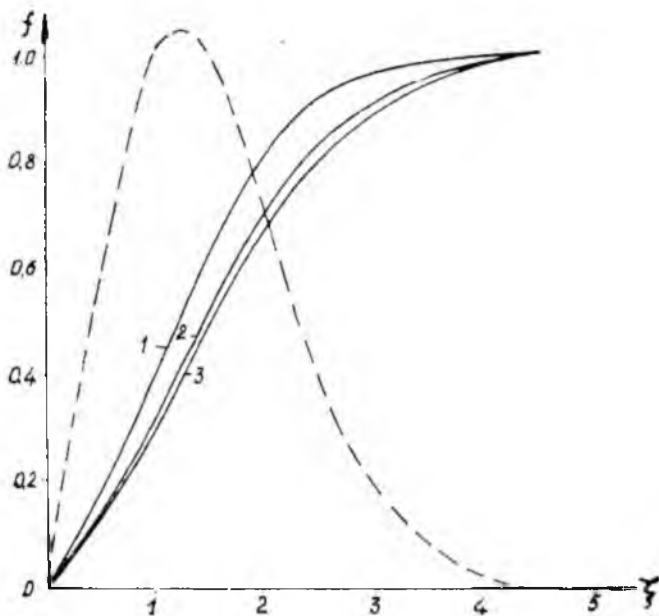
при граничных условиях (2.5)

Решение этой системы уравнений проведено на машине ИПТ-5. Блок-схема задачи — аналогична схеме, изображенной на фиг. 1.



Фиг. 3.

Решение задачи представлено на фиг. 3 при постоянном числе $\sigma=0,724$, а на фиг. 4 при постоянном значении $\beta=0,5$. Профили температуры, изображенные сплошными линиями 1, 2, 3 на фиг. 3, соответствуют значениям $\beta=0; 0,5; 0,75$, а на фиг. 4 — числам $\sigma=1; 0,724; 0,67$. Пунктиром показан профиль скорости.



Фиг. 4.

Известно, что для контроля правильности решения системы (2.7) на вычислительной машине необходимы некоторые точные соотношения между искомыми величинами. Этими соотношениями являются

$$F''(0) = \frac{F_{\infty}^3}{8}, \quad (2.8)$$

где $F_{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$;

$$\max F''(\bar{z}) = \frac{7}{32} F_{\infty}^2, \quad (2.9)$$

$$0 < \bar{z} < \infty;$$

$$F(\bar{z}) = \frac{F_{\infty}}{2\sqrt{2}}, \quad (2.10)$$

где \bar{z} — точка, в которой $F'(\bar{z})$ достигает максимума:

$$I = \int_0^{\infty} F F'^2 dz = \frac{3}{40} F_{\infty}^4. \quad (2.11)$$

2) Положим

$$n = 0,76; T_{\varphi} = \text{const.} \quad (2.12)$$

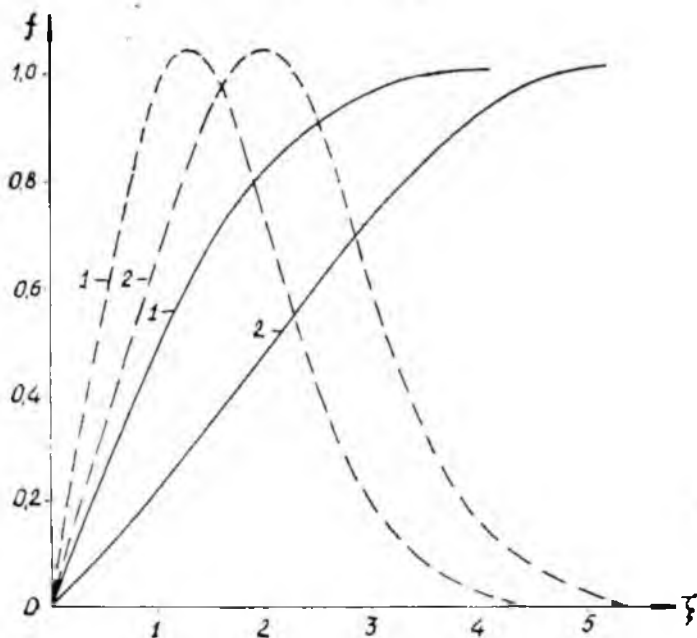
В этом случае система (2.4) примет вид

$$\left. \begin{aligned} F'' &= -(1,5 F'^2 + 0,75 F F'') \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{-0,76} + \\ &= 0,76 \left(\frac{T_{\infty}}{T} - 1 \right) \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{-1} F' F''; \\ f'' &= -0,75 \sigma f' F \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{-0,76} - 0,76 \left(\frac{T_{\infty}}{T} - 1 \right) \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{-1} f'^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Эта система уравнений при граничных условиях (2.5) эквивалентной системе пяти нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка и решается методом Рунге-Кутты.

Очевидно, что для решения системы (2.13) на ЭВМ «Урал-1» нужно выбрать $F''(0)$ и $f'(0)$ так, чтобы, пройдя траекторию, F и f на ∞ удовлетворяли условиям (2.5). Поэтому систему (2.13) предварительно проинтегрируем. В результате найдем:

$$\left. \begin{aligned} F''(0) &= 0,75 \left(\frac{T_{\infty}}{T} \right)^{0,76} \int_0^{\infty} F'^2 d\xi; \\ f'(0) &= 0,75 \left(\frac{T_{\infty}}{T} \right)^{-0,76} \int_0^{\infty} (1-f) F' d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$



Фиг. 6.

Если $F''(0)$ и $f'(0)$ задать по возможности разумнее и вместе с решением системы (2.13) подсчитывать правые части уравнений системы (2.14) то $F''(0)$ и $f'(0)$ можно корректировать. Очевидно, что этот метод решения задачи является громоздким и потребует большой затраты времени. Поэтому на ЭВМ «Урал-1» проведено решение системы (2.13) только с качественной стороны. Результаты решения представлены на фиг. 5. Сплошными линиями 1, 2 показаны профили температуры при числе $\sigma = 0,724$ соответственно для значений отношения $t_w / t_\infty = 1$ и 6, а пунктирными кривыми 1 и 2 изображены профили скорости, соответствующие тем же значениям отношения t_w / t_∞ .

ВЫВОДЫ

1. Моделирование задачи о распространении вдоль плоской стенки осесимметричных ламинарных струй при постоянных теплофизических константах на машине ИПТ-5 дает результат, подтверждающий теоретические решения.

2. Показано, что численное интегрирование дифференциальных уравнений, определяющих задачу о распространении вдоль стенки ламинарных струй при переменных теплофизических константах на ЭВМ «Урал-1» может иметь лишь качественный оценочный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Цуккер Ламинарная несжимаемая струя, бьющая из радиально-го диффузора вдоль стенки. ПММ, т. 18, вып. 6, 1954.
2. Л. А. Вулкс, А. Т. Трофименко. Тепловые задачи для ламинарной струи, распространяющейся вдоль стенки. ЖТФ т. 26, вып. 12, 1956.