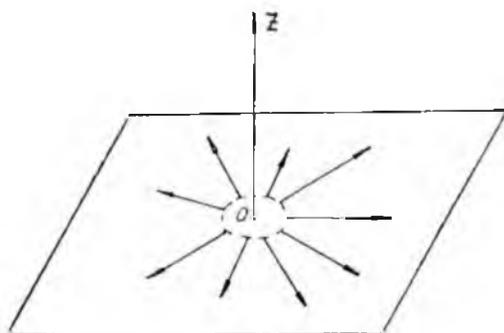


Н. В. КЛИЕНТОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Задача о распространении вдоль стенки плоской ламинарной струи, бьющей из бесконечно тонкой щели, была рассмотрена в работе [1]. При решении этой задачи был применен метод интегральных соотношений.

В настоящей статье этот метод распространяется на осесимметричные струйные течения вдоль стенки.



Фиг. 1.

Задача о течении вдоль стенки осесимметричной струи в несколько иной постановке, иным методом и только с гидродинамической точки зрения, рассматривалась М. С. Цуккером [2].

Предположим, что струя вязкой несжимаемой жидкости вытекает из радиального диффузора или точечного источника O и растекается вдоль плоской неограниченной стенки (фиг. 1).

Для осесимметричных течений наиболее удобной системой координат является цилиндрическая система координат z, r . За ось z примем ось симметрии, а r направим вдоль стенки. Источник O , в окрестности которого происходит осесимметричное растекание струи по стенке, примем за начало координат.

При установившемся движении система дифференциальных уравнений, определяющая гидродинамическую и тепловую задачи о распространении вдоль стенки ламинарной струи, бьющей из радиального диффузора, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} &= 0; \\ V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ν — кинематическая вязкость;
 a — коэффициент температуропроводности;
 T — избыточная температура.

Граничные условия запишутся в виде

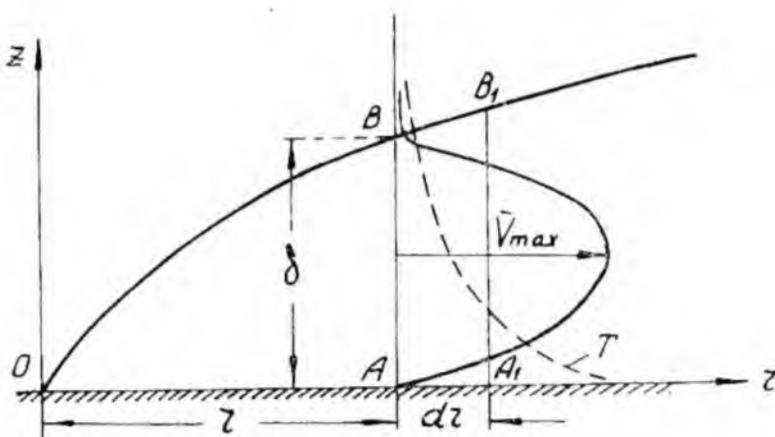
$$\left. \begin{aligned} V_r = 0, \quad V_z = 0, \quad T = T_w, \quad \text{при } z = 0; \\ V_r = 0, \quad \text{при } z = \delta, \quad T = 0, \quad \text{при } z = \delta_T. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В такой постановке гидродинамическая задача имеет тривиальное нулевое решение. Поэтому необходимо задать дополнительное условие, которому подчинялось бы решение задачи. Известно, что такое условие имеет вид

$$E = \int_0^{\delta} (rV_r^2 - \int_0^z rV_r dz) dz = \text{const}. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения системы (1) при граничных условиях (2) и при выполнении условия (3) удается проинтегрировать только лишь в простейших случаях почти изотермических течений, но и в этих случаях решение задачи приводит к громоздким вычислениям.

Оказывается, что решение поставленных задач значительно упрощается, если ко всей области пристеночного струйного течения применить известный метод интегральных соотношений Кармана. В теории пограничного слоя эти соотношения были установлены при изучении обтекания тел неограниченным потоком. Поэтому они



Фиг. 2.

не могут быть автоматически распространены на пристеночный слой струйных течений.

Если к элементарному кольцевому объему пристеночного слоя струи (фиг. 2) применить теорему об изменении количества движения и принять во внимание, что на внешней границе струи (при переходе к неподвижной жидкости) скорость приближенно равна нулю, поскольку мы рассматриваем установившееся движение, при котором $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$, то придем к интегральному соотношению вида

$$\frac{d}{dr} \int_0^{\delta} r V_r^2 dz = - \nu \left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (4)$$

Аналогично уравнение баланса тепла примет вид:

$$\frac{d}{dr} \int_0^{\delta} r TV_r dz = - \frac{\nu}{\alpha} \left[\frac{\partial(rT)}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (5)$$

Очевидно, что соотношения (4) и (5) можно получить непосредственно интегрированием первого и третьего уравнений системы (1), если их с помощью уравнения неразрывности предварительно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (rV_r V_z) &= \nu \frac{\partial^2 (rV_r)}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial}{\partial r} (rTV_r) + \frac{\partial}{\partial z} (rTV_z) &= \frac{\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При ламинарном струйном течении вдоль стенки наблюдается плавное распределение скоростей и температур. Поэтому решение как гидродинамической, так и тепловой задач может быть сведено к аппроксимации при помощи полиномов скоростного и температурного полей.

Профили скорости в сечениях струйного пристеночного слоя зададим в виде $\left(\eta = \frac{z}{\delta} \right)$.

$$V_r = V_{\max} F(\eta) \quad (7)$$

Выбор коэффициентов полинома $F(\eta)$ подчиним граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} F &= 0, \text{ при } \eta = 0 \text{ и при } \eta = 1; \\ F &= 1, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \text{ при } \eta = \frac{1}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= F'(0); \\ A_1 &= \int_0^1 F(\eta) d\eta; \\ A_2 &= \int_0^1 F^2(\eta) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда средняя радиальная скорость будет равна

$$\bar{V}_r = A_1 V_{\max}. \quad (10)$$

Но так как через полный расход жидкости

$$\dot{V}_r = \frac{G}{2\pi r \rho \delta}, \quad (11)$$

то максимальная по сечению скорость будет определяться формулой

$$V_{\max} = \frac{G}{2\pi A_1 \rho \delta}. \quad (12)$$

Тогда искомые профили скорости примут вид

$$V_r = \frac{GF(r)}{2\pi r A_1 \rho \delta}. \quad (13)$$

Принимая во внимание, что

$$\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{GA_0}{2\pi A_1 \rho \delta^2}, \quad (14)$$

уравнение импульсов (4) запишется в виде

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{G^2}{r \delta} \right) = -2\pi \mu \frac{1_0 A_1 G}{A_2 \delta^2}. \quad (15)$$

Воспользовавшись условием (3), найдем

$$r \delta = \frac{G^2 E_1}{(2\pi A_1)^2 \mu^2 E}, \quad (16)$$

где

$$E_1 = \int_0^1 F^2(\gamma) \left[\int_0^{\gamma} F(\gamma_1) d\gamma_1 \right] d\gamma. \quad (17)$$

Тогда дифференциальное уравнение (15) для определения массового расхода жидкости примет вид

$$G^5 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{G} \right) = - (2\pi A_1)^4 \mu^2 r^2 \frac{1_0 E}{A_2 E_1}. \quad (18)$$

Отсюда, после интегрирования, найдем:

$$G = 2\pi A_1 \rho \sqrt[4]{\frac{4\nu A_0^3 E r^5}{3 A_2 E_1}}. \quad (19)$$

Тогда толщина струйного пристеночного слоя, максимальная скорость, суммарный импульс, касательное напряжение трения на стенке, местный коэффициент сопротивления и произведение массового расхода на импульс соответственно будут определяться формулами:

$$\delta = \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{3\nu^3 A_0^3 E r^3}{4 A_2^3 E}}; \quad (20)$$

$$V_{\max} = \frac{3}{4} \left[\frac{4A_2 E}{3\nu A_0 E_1 r^2} \right]^{1/2}; \quad (21)$$

$$K = 2\pi A_2 \rho \left[\frac{3A_2 E^3}{4\nu A_0 E_1^3 r^3} \right]^{1/4}; \quad (22)$$

$$\tau_{\omega} = \frac{3A_2}{4} \rho \left[\frac{3A_2 E^3}{4\nu A_0 E_1^3 r^3} \right]^{1/4}; \quad (23)$$

$$C_f = \frac{4\pi A_0 \nu r}{GA_1}; \quad (24)$$

$$GK = 4\pi^2 \rho^2 A_1 A_2 \frac{E}{E_1} = \text{const.} \quad (25)$$

Среднее значение коэффициента сопротивления будет равно:

$$\overline{\tau C_f} = \frac{4}{5} C_f. \quad (26)$$

Формула (25) показывает, что произведение массового расхода на импульс оказывается величиной постоянной. Это значит, что величина E , пропорциональная произведению GK , всегда может быть найдена через начальный импульс, а, следовательно, выражена через площадь сопла и скорость V_0 истечения газов.

Теперь перейдем к рассмотрению тепловой задачи. Профили температур в сечениях теплового пристеночного слоя зададим полиномом $\left(\eta_0 = \frac{z}{\tau} \right)$:

$$T = T_w f(\eta_0). \quad (27)$$

Выбор коэффициентов полинома $f(\eta_0)$ подчиним граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} f &= 1, \text{ при } \eta_0 = 0; \\ f &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_0^2} = 0, \text{ при } \eta_0 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Сначала найдем толщину теплового пристеночного слоя. Для этого воспользуемся уравнением (5) баланса тепла, которое, после подстановки профилей скорости и температуры, примет вид

$$d(\ln T_w) = \frac{3}{4} \left[\frac{B}{\nu \Delta^3 H(\Delta)} - 1 \right] dr, \quad (29)$$

где

$$\Delta = \frac{\tau_0}{\delta}; \quad (30)$$

$$B = - \frac{A_2 j'(0)}{A_0}; \quad (31)$$

$$H(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_0^1 F(\eta) f(\eta_{1r}) d\eta_{1r}. \quad (32)$$

Производя интегрирование уравнения (29) с учетом того, что стенка имеет вполне определенную температуру

$$T_w = T_w, \text{ при } r = 1. \quad (33)$$

получим уравнение для определения Δ , а, следовательно, и δ_τ , в виде:

$$\Delta^3 H(\Delta) = \frac{B \ln r}{\sigma \ln \left[r^3 \left(\frac{T_w}{T_w} \right) \right]}. \quad (34)$$

Если ограничиться рассмотрением частного случая, когда $T_w = T_w = \text{const}$, то получим

$$\Delta^3 H(\Delta) = \frac{B}{\sigma}. \quad (35)$$

Отсюда видим, что $\delta_\tau = \delta$, а следовательно, и $\eta_{1r} = \eta$, при числах Прандтля

$$\sigma = \frac{B}{H(1)}. \quad (36)$$

Секулярное количество тепла, переносимое через единицу площади стенки, будет равно

$$q_w = - \frac{\lambda}{\delta \Delta} T_w f'(0). \quad (37)$$

Тогда коэффициент теплоотдачи, критерий теплового подобия Нуссельта, отнесенный к расстоянию r от источника, средние значения коэффициента теплоотдачи и критерия Нуссельта и произведение числа Нуссельта на коэффициент сопротивления соответственно будут определяться формулами

$$\alpha = - \frac{\lambda}{\delta \Delta} f'(0); \quad (38)$$

$$Nu_r = - \frac{3}{4} \frac{f'(0)}{\Delta} \sqrt[4]{\frac{4A_2^3 E}{3\nu^3 A_0^3 E_1 r}}; \quad (39)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{8}{3} \alpha; \quad (40)$$

$$\bar{Nu}_r = \frac{8}{3} Nu_r; \quad (41)$$

$$Nu_r C_f = - \frac{3}{2} \frac{A_2 f'(0)}{A_1^2 \Delta} = \text{const}. \quad (42)$$

Отсюда видим, что при струйном течении вдоль стенки, в отличие от обычной теории пограничного слоя, произведение (42) может быть использовано для определения критерия Нуссельта по известному коэффициенту сопротивления.

Если в качестве аппроксимирующего полинома скоростного поля взять полином второй степени

$$F(\eta) = 4\eta(1 - \eta), \quad (43)$$

а для температурного поля — полином третьей степени

$$f(\eta_r) = (1 - \eta_r)^3, \quad (44)$$

то основные характеристики течения и теплообмена будут определяться формулами таблицы 1.

Таблица 1

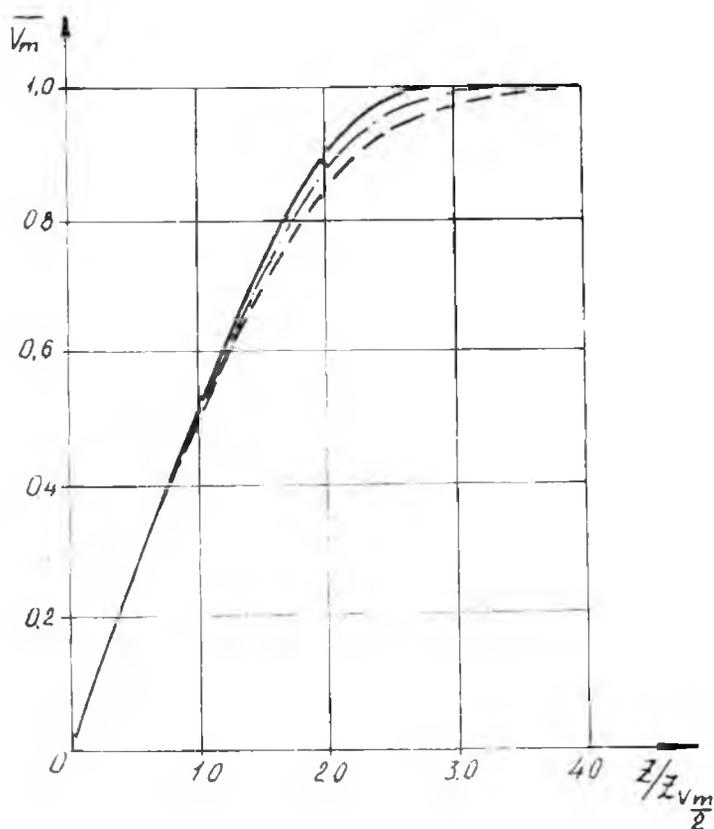
	Радиальная струя	Плоская струя	
V_{\max}	$0,75 \sqrt{\frac{E}{\nu r^3}}$	$0,434 \sqrt{\frac{E}{\nu x}}$	(45)
G	$11,5\rho \sqrt[4]{\nu E r^3}$	$2,404\rho \sqrt[4]{\nu E x}$	(46)
K	$6,876\rho \sqrt[4]{\frac{E}{\nu r^3}}$	$0,832\rho \sqrt[4]{\frac{E^3}{\nu x}}$	(47)
δ	$3,66 \sqrt[4]{\frac{\nu^3 r^3}{E}}$	$8,32 \sqrt[4]{\frac{\nu^3 x^3}{E}}$	(48)
$\tau_{\text{ст}}$	$0,822\rho \sqrt[4]{\frac{E^3}{\nu r^3}}$	$0,208\rho \sqrt[4]{\frac{E^3}{\nu x^3}}$	(49)
C_f	$6,56 \sqrt[4]{\frac{\nu^3 r}{E}}$	$6,36 \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{E x}}$	(50)
GK	$8\pi^2 \rho^2 E$	$2\rho^2 E$	(51)
$Nu_{r,x}$	$\frac{0,825}{\Delta} \sqrt[4]{\frac{E}{\nu^3 r}}$	$\frac{0,32}{\Delta} \sqrt[4]{\frac{E x}{\nu^3}}$	(52)
$C_f Nu_{r,x}$	$\frac{5,412}{\Delta}$	$\frac{1,035}{\Delta}$	(53)

В этой таблице для сравнения приведены формулы из работы [1] для случая плоской струи, вытекающей из бесконечно тонкой щели и распространяющейся вдоль одной из сторон плоской стенки.

Сопоставление формул (45) — (53) с решениями М. С. Цуккера [2], П. И. Акатнова [3], Л. А. Вулиса и А. Т. Трофименко [4] показы-

вает, что структуры соответствующих расчетных формул одинаковы. Разница в числовых коэффициентах сравнительно мала и в полной мере оправдывается простотой методики решения поставленных задач.

В заключение заметим, что во внутренней области (от стенки до точки максимума скорости) график распределения скоростей, заданных полиномом второй степени (фиг. 3), будет расположен (штрих-пунктирная линия) между графиками распределения ско-



Фиг. 3

ростей, приведенными в книге Л. Г. Лойцянского [5], для струи у стенки и для профиля Блазуса. Это, видимо, и является одной из причин, вызвавшей уменьшение числовых коэффициентов в формулах основных характеристик течения по сравнению с данными Н. И. Акатнова и М. С. Цуккера [2], [3].

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика применения интегральных соотношений к приближенному решению гидродинамической и тепловой задач при распространении вдоль стенки осесимметричных ламинарных струй, бьющих из радиального диффузора.

Оказалось, что для получения решения гидродинамической задачи, отличного от тривиального нулевого решения, необходимо к уравнению импульсов добавить условие «сохранения», впервые предложенное Н. И. Акатновым [3], заменив в нем верхний бесконечный предел интеграла на толщину области пристеночного течения.

2. Решение гидродинамической и тепловой задач, изложенное в статье, показывает, что методика, предложенная в работе [1], может быть обобщена и для более сложных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Клиентов. Труды Куйбышевского Авиационного института, вып. 15, кн. 2, 1963.
 2. М. С. Цуккер. ПММ, т. 18, вып. 6, 1954.
 3. Н. И. Акатнов. Труды Ленинградского Политехнического института. Энергомашиностроение, № 5, 1953.
 4. Л. А. Вулпс, А. Т. Трофименко. Журнал технической физики, т. 26, вып. 12, 1956.
 5. Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. Физматиз, 1962.
-