КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

Л. И. КУДРЯШЕВ, А. А. ГУСАКОВ

ВЛИЯНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ НА ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ И ДАВЛЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ ПОТОКОМ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

С математической точки зрения формулировка поставленной задачи сводится в случае скоростной и температурной стационарности к следующей системе дифференциальных уравнений, определяющей поле скоростей, давлений и температур.

$$(v\nabla)\,v = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P + \nu\,\nabla^2 v; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$(v\nabla)\,T = a\,\nabla^2 T. \tag{3}$$

Здесь v, P, T — соответственно скорость, давление и температура в любой точке поля;

ρ — плотность обтекающей среды;

ν, a — кинематический коэффициент вязкости и коэффициент температуропроводности обтекающей среды, отнесенные к средней температуре $T_m = \frac{T_w + T_\infty}{2}$,

где T_w — температура на поверхности обтекаемого тела;

T_∞ — температура невозмущенной обтекающей среды;

F — подъемная сила.

В качестве граничных условий задаются скорость v_∞ и температура T_∞ набегающего потока, а также постоянная температура T_w на поверхности обтекаемого тела. Скорость у поверхности принимается равной нулю. Вследствие весьма малых чисел Рейнольдса (будем считать $Re \leqslant 1$) обтекание можно считать безотрывным.

Предположение о малости чисел Рейнольдса дает возможность значительно упростить поставленную задачу за счет отбрасывания малых инерционных членов в уравнении (1). Справедливость такого упрощения при числах Рейнольдса, меньших единицы, была доказана Стоксом [1].

Систему уравнений (1)—(3) с принятым упрощением целесообразно рассматривать в безразмерной сферической системе координат ξ, Θ, записанной с учетом осевой симметрии:

$$-\frac{\partial p'}{\partial \xi}+\frac{2}{Re}\left(\frac{\partial^2 v'_\xi}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v'_\xi}{\partial \Theta^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial v'_\xi}{\partial \xi}+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}\frac{\partial v'_\xi}{\partial \Theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta}-\frac{2v'_\xi}{\xi^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}v'_\Theta\right)=-\frac{1}{2}\frac{Gr}{Re^2}F'_\xi; \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\xi}\frac{\partial p'}{\partial \Theta}+\frac{2}{Re}\left(\frac{\partial^2 v'_\Theta}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 v'_\Theta}{\partial \Theta^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \xi}+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\xi^2}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\xi^2}\frac{\partial v'_\xi}{\partial \Theta}-\frac{v'_\Theta}{\xi^2\sin^2\Theta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{Gr}{Re^2}F'_\Theta; \tag{5}$$

$$\frac{\partial v'_\xi}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial v'_\Theta}{\partial \Theta}+\frac{2v'_\xi}{\xi}+\frac{v'_\Theta\operatorname{ctg}\Theta}{\xi}=0; \tag{6}$$

$$v'_\xi\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}+\frac{v'_\Theta}{\xi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta}=\frac{2}{Pr\,Re}\left[\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)\right]. \tag{7}$$

Начало сферической системы предполагаем совпадающим с центром обтекаемой сферы. В записанной системе (4)—(7) введены следующие безразмерные величины:

$\xi=\frac{r}{R}$; r — размерная сферическая радиальная координата;

R — радиус обтекаемой сферы;

Θ — угол, отсчитываемый в радианах от радиуса, совпадающего по направлению со скоростью набегающего потока v_∞, проходящего через хвостовую критическую точку; $0\leqslant\Theta\leqslant\pi$.

$v'_\xi=\frac{v_r}{v_\infty}$; $v'_\Theta=\frac{v_\Theta}{v_\infty}$ — сферические составляющие скорости в любой точке поля;

$p'=\frac{p}{\rho v_\infty^2}$ — безразмерное давление в любой точке поля;

$\vartheta=\frac{T-T_\infty}{T_{ж}-T_\infty}$ — безразмерная температура в любой точке поля;

$$Re=\frac{2R\cdot v_\infty}{\nu};\quad Pr=\frac{\nu}{a};\quad Gr=\frac{\beta\, q(2R)^3(T_{ж}-T_\infty)}{\nu^2}\ —$$

критерии Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа соответственно (β — коэффициент объемной деформации обтекающей среды;

g — ускорение силы тяжести);

$F'_\xi = \pm\vartheta\cdot\cos\Theta$; $F'_\Theta = \mp\vartheta\sin\Theta$ — сферические составляющие подъемной силы (здесь и в дальнейшем при наличии двойных знаков верхние знаки соответствуют случаю совпадения направлений скорости v_∞ и свободной конвекции, нижние знаки — случаю их взаимной противоположности).

Отметим, что в правой части уравнения теплового баланса (7) мы пренебрегаем членом, определяющим теплопроводность в тангенциальном направлении, по сравнению с конвективным потоком в этом направлении.

Граничные условия для скорости могут быть записаны в виде:

$$\text{при } \xi = 1 \quad v_\xi = 0; \quad v'_\Theta = 0;$$

$$\text{при } \xi \to \infty \; v_\xi \to \cos\Theta; \quad v'_\Theta \to -\sin\Theta. \tag{8}$$

Граничные условия для температуры:

$$\text{при } \xi = 1 \quad \vartheta = 1;$$

$$\text{при } \xi \to \infty; \; \vartheta \to 0; \; \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \to 0. \tag{9}$$

Точное решение системы (4) — (7) даже в представленной упрощенной форме оказывается весьма сложным из-за наличия в правых частях (4) и (5) величин, зависящих от температуры. Однако сравнительно просто можно получить приближенное поле скоростей и давлений, введя в рассмотрение вместо истинной функции ϑ, удовлетворяющей системе (4)—(7) при граничных условиях (8) и (9), приближенную функцию ϑ, качественно соответствующую физической сущности рассматриваемого процесса ($\vartheta > 0; \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} < 0; \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} > 0$; в диапазоне $1 < \xi < \infty$), удовлетворяющую «гидродинамической» системе (4)—(6) при граничных условиях (8), удовлетворяющую поставленным условиям для температуры (9) и, кроме того дополнительным двум условиям, отождествляющим поведение истинной и приближенной функций у поверхности обтекаемого тела и на достаточно большом удалении от него. Рассмотрим эти дополнительные условия.

При $\xi \to \infty$ в соответствии с (9) $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \to 0$. Полагая в уравнении (7) $\xi = \infty$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = 0$, получаем

$$\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}\right]_{\xi\to\infty} \to 0. \tag{10}$$

Полагая, далее, в соответствии с (8) в уравнении (7) $\xi = 1$, $v_\xi = v'_\Theta = 0$, получаем:

$$\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right]_{\xi=1} = 0. \tag{11}$$

В качестве функции, удовлетворяющей перечисленным условиям, принимаем

$$\vartheta = \sum_k \frac{a_k}{\xi}, \tag{12}$$

где k и a_k — неопределенные постоянные величины.

В этом случае

$$\begin{aligned} F'_\xi &= \pm \left[\sum_k \frac{a_k}{\xi^k}\right] \cos\Theta; \\ F'_\Theta &= \mp \left[\sum_k \frac{a_k}{\xi^k}\right] \sin\Theta. \end{aligned} \tag{13}$$

При учете (13) уравнения (4), (5), (6) можно рассматривать как самостоятельную гидродинамическую систему, независимую от (7).

Решение системы (4)—(6) при учете (13) ищется в форме:

$$\begin{aligned} v'_\xi &= \varphi_1(\xi)\cdot\cos\Theta; \\ v'_\Theta &= -\varphi_2(\xi)\cdot\sin\Theta; \\ p' &= \lambda(\xi)\cdot\cos\Theta. \end{aligned} \tag{14}$$

В этом случае система (4) — (6) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь, можно привести к виду:

$$\xi^3\varphi_1^{IV} + 8\xi^2\varphi_1^{III} + 8\xi\varphi_1^{II} - 8\varphi_1^{I} = \pm\frac{1}{2}\frac{Gr}{Re}\sum_k \frac{k a_k}{\xi^{k-1}}; \tag{15}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\xi}{2}\varphi_1'; \tag{16}$$

$$\lambda = \frac{2}{Re}\left(\frac{\xi^2}{2}\varphi_1^{III} + 3\xi\varphi_1^{II} + 2\varphi_1^{I}\right) \pm \frac{1}{2}\frac{Gr}{Re^2}\sum_k \frac{a_k}{\xi^{k-1}}. \tag{17}$$

Граничные условия, соответствующие (8), примут вид:

$$\begin{aligned} &\text{при } \xi = 1 \quad \varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = 0; \\ &\text{при } \xi \to \infty \quad \varphi_1 \to 1; \quad \varphi_2 \to 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Общее решение соответствующего (15) однородного уравнения запишется в виде:

$$\varphi_{1\,\text{одн.}} = \frac{c_1}{\xi^3} + \frac{c_2}{\xi} + c_3 + c_4\xi^2. \tag{19}$$

Частное решение неоднородного уравнения (15) ищется в виде:

$$\varphi_{1\,\text{част}} = \mp\frac{1}{2}\frac{Gr}{Re}\sum_k \frac{a_k}{\xi^{k-2}}. \tag{20}$$

Тогда для определения величин k получаем алгебраическое уравнение:

$$k^4 - 10k^3 + 31k^2 - 29\,k = 0,$$

корнями которого будут

$$k_1 = 0; \quad k = 1{,}754; \quad k_3 = 4{,}802; \quad k_4 = 3{,}445.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (15) запишется в виде:

$$\varphi_1 = \frac{c_1}{\xi^3} + \frac{c_2}{\xi} + c_3 + c_4 \xi^2 \mp$$

$$\mp \frac{1}{2} \frac{Gr}{Re} \left(a_1 \xi^2 + a_2 \xi^{0,255} + \frac{a_3}{\xi^{2,802}} + \frac{a_4}{\xi^{1,445}} \right). \tag{21}$$

Определяя постоянные величины с помощью условий (18) и учитывая одновременно (12), (9), (16), (10), (11), получим:

$$c_1 = \mp 0{,}179 \frac{Gr}{Re} + \frac{1}{2}; \quad c_4 = a_1 = a_2 = 0;$$

$$c_2 = \pm 0{,}679 \frac{Gr}{Re} - \frac{3}{2} \quad a_3 = -0{,}856; \tag{22}$$

$$c_3 = 1; \quad a_4 = 1{,}856.$$

Предложенную формулу (12) в этом случае можно записать в виде:

$$\vartheta = \frac{1{,}856}{\xi^{3,445}} - \frac{0{,}856}{\xi^{4,802}}, \tag{23}$$

а выражения, определяющие поле скоростей и давлений по (14), (21), (16) и (17) — в виде:

$$v_\xi = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^3}\right) \cos \Theta$$

$$\pm \frac{Gr}{Re} \left(\frac{0{,}679}{\xi} - \frac{0{,}179}{\xi^3} - \frac{0{,}928}{\xi^{1,445}} + \frac{0{,}428}{\xi^{2,802}} \right) \cos \Theta; \tag{24}$$

$$v_\Theta = -\left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{4} \frac{1}{\xi^3}\right) \sin \Theta$$

$$\mp \frac{Gr}{Re} \left(\frac{0{,}3395}{\xi} + \frac{0{,}0895}{\xi^3} - \frac{0{,}2575}{\xi^{1,445}} - \frac{0{,}1715}{\xi^{2,802}} \right) \sin \Theta; \tag{25}$$

$$p' = -\frac{3}{Re} \frac{\cos \Theta}{\xi^2} \mp \frac{Gr}{Re^2} \left(-\frac{1{,}358}{\xi^2} + \frac{2{,}085}{\xi^{2,445}} - \frac{0{,}2375}{\xi^{3,802}} \right) \cos \Theta. \tag{26}$$

Отметим, что в том случае, когда температура поверхности обтекаемого тела не отличается от температуры невозмущенного набегающего потока ($Gr=0$), полученные формулы (24), (25), (26) обращаются в известные формулы Стокса [1]:

$$v_\xi = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^3}\right) \cos \Theta;$$

$$v_\Theta = -\left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{4} \frac{1}{\xi^3}\right) \sin \Theta; \tag{27}$$

$$p' = -\frac{3}{Re} \frac{\cos \Theta}{\xi^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. Math. and. Phys. Papers, v. III p. 1, 1851; или Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Том II. стр. 388. 1948