КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА

Труды, выпуск 63, 1972 г.

И.С.Ахмедьянов, А.В.Киреев

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

В работе [2] получена система нелинейных дифференциальных уравнений малых упруго-пластических деформаций сферической оболочки при произвольном нагружении, в которых в качестве основных неизвестных были приняты внутренние усилия и моменты. В предлагаемой статье рассматривается вопрос об интегрировании этих уравнений методом последовательных приближений (методом упругих решений) [1].

1. Пусть внешняя поверхностная нагрузка представлена рядами

$$q_x(q_z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_{xn}(q_{zn})\cos n\varphi, \qquad q_y=\sum_{n=1}^{\infty} q_{yn}\sin n\varphi .$$

Обозначим значения N, X, Y, M, U и V ж) в k-ом приближении через $N^{(k)}$, ..., $V^{(k)}$. Записав выражения

$$N^{(k)}(X^{(k)}, M^{(k)}, U^{(k)})=\sum_{n=0}^{\infty} N_{kn}(X_{kn}, M_{kn}, U_{kn})\cos n\varphi$$

$$Y^{(k)}(V^{(k)})=\sum_{n=1}^{\infty} Y_{kn}(V_{kn})\sin n\varphi$$

и воспользовавшись полученными в [2] уравнениями упруго-пластических деформаций сферической оболочки, можно прийти к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций N_{kn}, ..., V_{kn} ($\nu = 12m^2$):

ж) Все принятые здесь обозначения соответствуют работе [2]

$$\frac{1}{\sin\psi}\left(N'_{\kappa n}\sin\psi\right)' = \left(\frac{n^2}{\sin^2\psi} - 1 - \mu\right)N_{\kappa n} - \frac{\nu(1-\mu)}{R}\,\mathcal{M}_{\kappa n} +$$

$$+\Gamma_{p\kappa n} - (1+\mu)R\left(q'_{xn} + q_{xn}\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi}q_{yn} - q_{zn}\right)$$

$$\frac{1}{\sin\psi}\left(\mathcal{M}'_{\kappa n}\sin\psi\right)' = \left(\frac{n^2}{\sin^2\psi} - 1 + \mu\right)\mathcal{M}_{\kappa n} + (1+\mu)RN_{\kappa n} +$$

$$+\Delta_{p\kappa n} - (1+\mu)R^2 q_{zn}, \qquad (\mathrm{I})$$

$$a'_{\kappa n} + \left(2\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi}\right)a_{\kappa n} = F'_{\kappa n} - \frac{n}{\sin\psi}F_{\kappa n} -$$

$$-(J_{p\kappa n} + K_{p\kappa n}) - \frac{2\nu R}{1+\nu}(q_{xn} + q_{yn})$$

$$b'_{\kappa n} + \left(2\operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi}\right)b_{\kappa n} = F'_{\kappa n} + \frac{n}{\sin\psi}F_{\kappa n} -$$

$$-(J_{p\kappa n} - K_{p\kappa n}) - \frac{2\nu R}{1+\nu}(q_{xn} - q_{yn})$$

$$e'_{\kappa n} + \left(2\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi}\right)e_{\kappa n} = P'_{\kappa n} - \frac{n}{\sin\psi}P_{\kappa n} +$$

$$+R(J_{p\kappa n} + K_{p\kappa n}) - \frac{2R^2}{1+\nu}(q_{xn} + q_{yn})$$

$$f'_{\kappa n} + \left(2\operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi}\right)f_{\kappa n} = P'_{\kappa n} + \frac{n}{\sin\psi}P_{\kappa n} +$$

$$+R(J_{p\kappa n} - K_{p\kappa n}) - \frac{2R^2}{1+\nu}(q_{xn} - q_{yn}) \qquad (2)$$

Здесь

$$a_{\kappa n} = X_{\kappa n} + Y_{\kappa n}, \quad b_{\kappa n} = X_{\kappa n} - Y_{\kappa n}$$

$$e_{\kappa n} = U_{\kappa n} + V_{\kappa n}, \quad f_{\kappa n} = U_{\kappa n} - V_{\kappa n}, \qquad (3)$$

$$F_{\kappa n} = \frac{2}{(1+\mu)(1+\nu)}\left(N_{\kappa n} - \frac{\nu}{R}\mathcal{M}_{\kappa n}\right) - N_{\kappa n}$$

$$P_{\kappa n} = -\frac{2R}{(1+\mu)(1+\nu)}\left(N_{\kappa n} - \frac{\nu}{R}\mathcal{M}_{\kappa n}\right) - \mathcal{M}_{\kappa n}, \qquad (4)$$

Γ_{pkn}, Δ_{pkn}, $\mathcal{J}_{pkn}$, K_{pkn} - коэффициенты разложений

$\Gamma_{pk}(\Delta_{pk}, \mathcal{J}_{pk}, K_{pk}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Gamma_{pkn}(\Delta_{pkn}, \mathcal{J}_{pkn}, K_{pkn})\cos n\varphi$, являющиеся функциями ψ и определяемые по деформациям предыдущего (k - I)-го приближения. В исходном, нулевом, приближении эти коэффициенты равны нулю.

Штрих означает производную по аргументу ψ .

2. Решение системы (I) - (2) имеет вид

$$N_{kn} = \overset{\circ}{N}_{kn} + N_{qn} + N_{pkn}, \ldots, \quad V_{kn} = \overset{\circ}{V}_{kn} + V_{qn} + V_{pkn}, \qquad (5)$$

где

$\overset{\circ}{N}_{kn}, \ldots, \overset{\circ}{V}_{kn}$ - общее решение соответствующей однородной системы, приведенное в [3];

$N_{qn}, \ldots, V_{qn}$ - частное решение системы при

$$\Gamma_{pkn} = \Delta_{pkn} = \mathcal{J}_{pkn} = K_{pkn} = 0,$$

$N_{pkn}, \ldots, V_{pkn}$ - частное решение системы при

$$q_{xn} = q_{yn} = q_{zn} = 0.$$

3. Пусть рассматриваемая оболочка ограничена параллелями α и β , т.е. $\alpha \le \psi \le \beta$.

Если предположить, что пластические деформации в оболочке развиваются в областях $\alpha \le \psi \le \gamma_1$ и $\gamma_2 \le \psi \le \beta$, где γ_1 и γ_2 - некоторые, пока неизвестные углы, то для значений $\gamma_1 \le \psi \le \gamma_2$ можно считать, что $N_{pkn} = 0, \ldots, V_{pkn} = 0$.

Для первой области пластических деформаций ($\alpha \le \psi \le \gamma_1$) частное решение $N_{pkn}, \ldots, V_{pkn}$ будет отлично от нуля и найдется следующим образом.

Положим в (I) $q_{xn} = q_{yn} = q_{zn} = 0$ и преобразуем получившиеся уравнения в интегральные. В результате будем иметь

$$N_{pkn} = n^2 L_1 N_{pkn} + L_2 W_{pkn} + L_2 \Gamma_{pkn}$$

$$\mathcal{M}_{pkn} = n^2 L_1 \mathcal{M}_{pkn} + L_2 Z_{pkn} + L_2 \Delta_{pkn}. \qquad (6)$$

Здесь

$$W_{pkn} = -(1+\mu) N_{pkn} - \frac{\nu(1-\mu)}{R} \mathcal{M}_{pkn}$$

$$Z_{pkn} = -(1-\mu)\mathcal{M}_{pkn} + (1+\mu) R N_{pkn}.$$

L_1 и L_2 – интегральные операторы:

$$L_1 f = \int\limits_{\psi}^{\gamma_1} \frac{1}{\sin\psi_1} \int\limits_{\psi_1}^{\gamma_1} \frac{f}{\sin\psi_2} d\psi_2 d\psi_1 , \quad L_2 f = \int\limits_{\psi}^{\gamma_1} \frac{1}{\sin\psi_1} \int\limits_{\psi_1}^{\gamma_1} f \sin\psi_2 d\psi_2 d\psi_1 .$$

Далее, исходя из (3), находим

$$X_{pkn} = \frac{1}{2}(a_{pkn} + b_{pkn}), \quad Y_{pkn} = \frac{1}{2}(a_{pkn} - b_{pkn})$$

$$U_{pkn} = \frac{1}{2}(e_{pkn} + f_{pkn}), \quad V_{pkn} = \frac{1}{2}(e_{pkn} - f_{pkn}),$$

где

$$a_{pkn} = z_n \ell_1(\Lambda_{pkn}), \quad b_{pkn} = y_n \ell_2(\Pi_{pkn})$$

$$e_{pkn} = z_n \ell_1(T_{pkn}), \quad f_{pkn} = y_n \ell_2(\Phi_{pkn}), \qquad (7)$$

причем

$$\Lambda_{pkn} = F'_{pkn} - \frac{n}{\sin\psi} F_{pkn} - (J_{pkn} + K_{pkn})$$

$$\Pi_{pkn} = F'_{pkn} + \frac{n}{\sin\psi} F_{pkn} - (J_{pkn} - K_{pkn}) .$$

$$T_{pkn} = P'_{pkn} - \frac{n}{\sin\psi} P_{pkn} + R(J_{pkn} + K_{pkn})$$

$$\Phi_{pkn} = P'_{pkn} + \frac{n}{\sin\psi} P_{pkn} + R(J_{pkn} - K_{pkn}), \qquad (8)$$

$$y_n = \frac{1}{\sin^2\psi} tg^n \frac{\psi}{2}, \quad z_n = \frac{1}{\sin^2\psi} ctg^n \frac{\psi}{2}$$

$$\ell_1 f = -\int\limits_{\psi}^{\gamma_1} f \sin^2\psi_1 \, tg^n \frac{\psi_1}{2} d\psi_1 , \quad \ell_2 f = -\int\limits_{\psi}^{\gamma_1} f \sin^2\psi_1 \, ctg^n \frac{\psi_1}{2} d\psi_1$$

Значения функций F_{pkn} и P_{pkn}, входящих в выражения (8), определяются по формулам (4), в которых предварительно величины N_{kn} и $\mathcal{M}_{kn}$ следует заменить на N_{pkn} и $\mathcal{M}_{pkn}$.

4. Так как в правые части интегральных уравнений (6) и (7) входят искомые функции N_{pkn} ,...., V_{pkn}, то численные расчеты проводятся по значениям этих функций в (к – I)-ом приближении.

Применяя интегрирование по частям к выражениям $L_2(\Gamma_{pkn})$, ..., $\ell_2(\Phi_{pkn})$, можно прийти к соотношениям, которые не содержат производных от величин ε_{pn}, ζ_{pn}, ω_{pn}, $\varkappa_{pn}$, τ_{pn}, χ_{pn}, представляющих собой коэффициенты разложений

$$\varepsilon_p(\zeta_p, \varkappa_p, \tau_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{pn}(\zeta_{pn}, \varkappa_{pn}, \tau_{pn}) \cos n\varphi$$

$$\omega_p(\chi_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{pn}(\chi_{pn}) \sin n\varphi .$$

Здесь ε_p, ... χ_p – функции, получаемые для каждого приближения не аналитически, а в виде некоторой совокупности числовых значений.

Для второй области пластических деформаций ($\gamma_2 \leq \psi \leq \beta$) частное решение N_{pkn}, ..., V_{pkn} строится аналогичным образом.

Если пластические деформации распространяются на всю оболочку, то в этом случае можно принять $\gamma_1 = \beta$ или $\gamma_2 = \alpha$.

5. Перейдем к определению перемещений u , v и w точек срединной поверхности оболочки, используя соответствующие зависимости из [2] . Положив

$$u(w) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(w_n) \cos n\varphi, \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin n\varphi,$$

в результате придем к следующей системе уравнений относительно функций u_n и v_n (в k -ом приближении) :

$$\ell'_{kn} - \left(\operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi}\right) \ell_{kn} = \Psi_{kn}$$

$$m'_{kn} - \left(\operatorname{ctg}\psi - \frac{n}{\sin\psi}\right) m_{kn} = \Omega_{kn} \qquad (9)$$

Здесь

$$\ell_{kn} = u_{kn} + v_{kn}, \quad m_{kn} = u_{kn} - v_{kn}$$

$$\Psi_{kn} = \frac{(1+\mu)R}{E\delta}(X_n + Y_n)^{(k-1)} + R(\zeta_{pn} + \omega_{pn})^{(k-1)}$$

$$\Omega_{kn} = \frac{(1+\mu)R}{E\delta}(X_n - Y_n)^{(k-1)} + R(\zeta_{pn} - \omega_{pn})^{(k-1)} \qquad (10)$$

Верхний индекс (к - I) означает номер приближения.

После решения системы (9) будем иметь

$$u_{kn} = u^{o}_{kn} + u_{qn} + u_{pkn}, \qquad v_{kn} = v^{o}_{kn} + v_{qn} + v_{pkn},$$

где

u^{o}_{kn}, v^{o}_{kn} - перемещения, определяемые общим решением соответствующей однородной системы и усилиями X^{o}_{nk}, Y^{o}_{nk};

u_{qn}, v_{qn} - перемещения, определяемые усилиями X_{qn}, Y_{qn};

$$u_{pkn} = \frac{1}{2}(\ell_{pkn} + m_{pkn}), \qquad v_{pkn} = \frac{1}{2}(\ell_{pkn} - m_{pkn})$$

$$\ell_{pkn} = -\sin\psi \, tg^n \frac{\psi}{2} \int\limits_{\psi}^{\gamma_1} \Psi_{pkn} \, ctg^n \frac{\psi_1}{2} \frac{d\psi_1}{\sin\psi_1}$$

$$m_{pkn} = -\sin\psi \, ctg^n \frac{\psi}{2} \int\limits_{\psi}^{\gamma_1} \Omega_{pkn} \, tg^n \frac{\psi_1}{2} \frac{d\psi_1}{\sin\psi_1}.$$

Значения Ψ_{pkn} и Ω_{pkn} получаются из (IO) заменой X_n и Y_n на X_{pn} и Y_{pn}.

Нормальное перемещение w_n (в к -ом приближении) определится равенством [2]

$$w_{kn} = w^{o}_{kn} + w_{qn} + w_{pkn}.$$

Здесь индексы 0, q и p имеют прежнее смысловое значение, причем

$$w_{pkn} = \frac{R}{2E\delta}\left[(1-\mu)N_{pn} - (1+\mu)X_{pn}\right]^{(k-1)} + \frac{R}{2}(\varepsilon_{pn} - \zeta_{pn})^{(k-1)} -$$

$$- u_{pkn}\, ctg\,\psi - \frac{n}{\sin\psi} v_{pkn}$$

Приведенные формулы для u_{pkn}, v_{pkn} и w_{pkn} относится к первой области пластических деформаций ($\alpha \le \psi \le \gamma_1$).

Для значений $\gamma_2 \le \psi \le \beta$ решение строится аналогично.

6. В заключение найдем угол поворота ϑ_1 касательной к меридиану вокруг параллели. Записав ряд

$$\vartheta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{1n} \cos n\psi$$

и воспользовавшись известной формулой

$$\varkappa_1 = \frac{1}{R} \vartheta_1',$$

приходим к соотношению

$$\vartheta_{1n} = R\int æ_{1n}\, d\psi ,$$

в котором

$$Ræ_{1n} = \frac{6m(1-\mu)}{E\delta^2}\left(\mathcal{M}_n + \mathcal{U}_n\right)^{(K-1)} + \frac{1}{2}\left(æ_{pn} + \tau_{pn}\right)^{(K-1)} .$$

Вычисление интеграла приводит к формуле (для K -го приближения) :

$$\vartheta_{1Kn} = \vartheta^{\circ}_{1Kn} + \vartheta_{1qn} + \vartheta_{1pKn} .$$

Литература

1. А.А.Ильюшин. Пластичность. ОГИЗ, ГИТТЛ, Москва, 1948.
2. И.С.Ахмедьянов, А.В.Киреев. Труды КуАИ, вып.60, Куйбышев, 1972.
3. И.С.Ахмедьянов. "Расчет сферических оболочек". Труды КуАИ, вып.29, Куйбышев, 1967.