КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 63, 1972 г.

В.И.Леонов, Х.С.Хазанов

К РАСЧЕТУ ИСКРИВЛЕННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН НА НОРМАЛЬНЫЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Исследуется напряженное состояние круглой панели радиуса r_o, вырезанной из цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности R и толщиной δ.[ж)] Рассмотрено нагру-

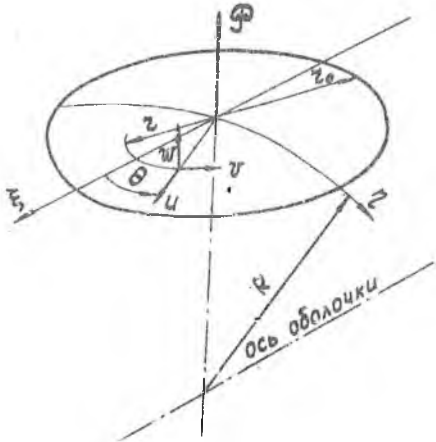


Рис.I

ж) Основные обозначения в настоящей статье приняты такими же, как на стр. 16 настоящего сборника.

жение панели нормальной сосредоточенной силой в центре и случай, когда нормальная сила приложена через жесткое включение радиуса r_1. Наружный контур панели предполагается либо шарнирно опертым, либо жестко защемленным.

Используется решение однородного дифференциального уравнения пологой цилиндрической оболочки в полярных координатах [I,2,3], которое для напряженного состояния, симметричного относительно ξ и η (рис.I), имеет вид

$$\bar{F}(z,\theta)=w+i\Phi=\sum_{\nu=0,2...}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\ell_\nu i^\nu[A_nH_n^{(1)}(z)+B_nJ_n(z)][J_{n-\nu}(z)+J_{n+\nu}(z)]\cos\nu\theta, \quad (I)$$

где $\ell_\nu=\frac{1}{2}$ при $\nu=0$ и $\ell_\nu=1$ при $\nu\neq0$

$$z=x\sqrt{2i}, \quad x=\omega\rho, \quad \omega=\frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\frac{r_0}{\sqrt{R\delta}},$$

$A_n=a_n+ib_n$, $B_n=c_n+id_n$ - комплексные постоянные.

Через $J_n(z)$, $H_n^{(1)}(z)$ обозначены функция Бесселя первого рода и первая функция Ганкеля.

Применительно к нагружению панели нормальной силой к решению (I) следует добавить фундаментальное решение $\overset{\circ}{F}(z,\theta)$, приведенное на стр. I7 настоящего сборника.

Если к панели приложена в начале координат сосредоточенная сила $\mathcal{P}$, то в (I) нужно оставить только возрастающую при больших $\omega\rho$ часть, т.е. положить $A_n=0$

В случае шарнирного опирания контура панели граничные условия запишутся в виде

$$\text{при } \rho=1, \quad \overset{\circ}{M}_\rho+\bar{M}_\rho=0, \quad \overset{\circ}{u}+\bar{u}-\frac{1}{2}\varkappa a(1-\cos2\theta)=0$$
$$\overset{\circ}{w}+\bar{w}+a=0, \quad \overset{\circ}{v}+\bar{v}-\frac{1}{2}\varkappa a\sin2\theta=0, \quad (2)$$

где a - жесткое смещение.

При жестком защемлении контура первое граничное условие системы (2) заменится на

$$\frac{\partial\overset{\circ}{w}}{\partial\rho}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial\rho}=0. \quad (3)$$

Индексом „0" сверху будем обозначать все величины, соответствующие фундаментальному решению. Черточкой сверху - величины, соответствующие решению (I) однородного уравнения. Ряды для усилий и перемещений срединной поверхности оболочки, соответствующие фундаментальному решению $F^{\circ}(z,\theta)$ и решению (I), приведены на стр.19-20 настоящего сборника и в [2,3].

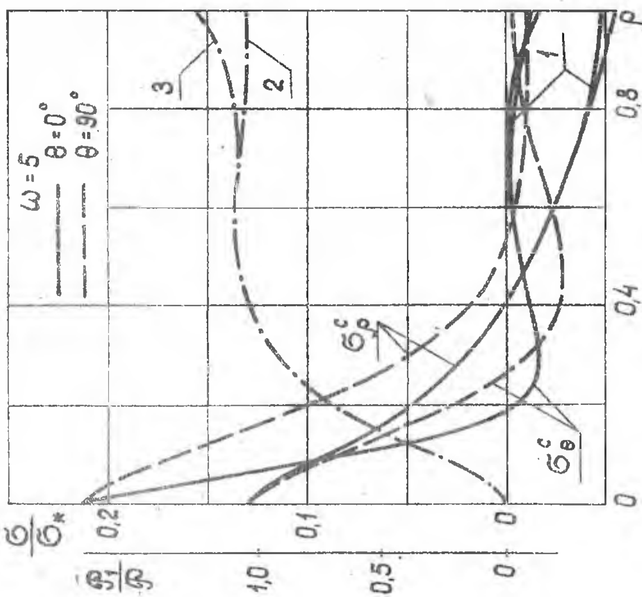
Приравнивая нулю в каждом уравнении системы (2) члены, содержащие одинаковые тригонометрические функции, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно c_n, d_n и a. Заменяя бесконечные ряды конечными суммами, приходим к замкнутой системе уравнений.

Ниже приведены некоторые результаты вычислений на ЭВМ БЭСМ-4. Коэффициент Пуассона μ принимался равным 0,3. Все результаты представлены в безразмерном виде: напряжения отнесены к $\sigma_* = \frac{\mathcal{P}}{\delta^2}$, а перемещения к $\frac{R\sigma_*}{E}$. Параметр ω, характеризующий геометрию панели, изменялся от 0 (плоская пластина) до 6.

На рис.2 и 3 в качестве иллюстрации показано распределение изгибных и мембранных напряжений для шарнирно опертой панели ж) при $\omega=5$. Сплошные линии соответствуют $\theta=0$, штриховые - $\theta=\frac{\pi}{2}$. Изгибные напряжения в точке приложения сосредоточенной силы имеют логарифмическую особенность. Мембранные напряжения имеют конечное значение и достигают максимума в начале координат. При $\omega \geqslant 2$ способ закрепления панели (шарнирное опирание, жесткая заделка) влияет на распределение напряжений только вблизи ее границы. Это проиллюстрировано на рис.2 и 3, где кривые I соответствуют жесткому защемлению контура панели. Изгибные напряжения, ввиду их малости, построены в десятикратном масштабе.

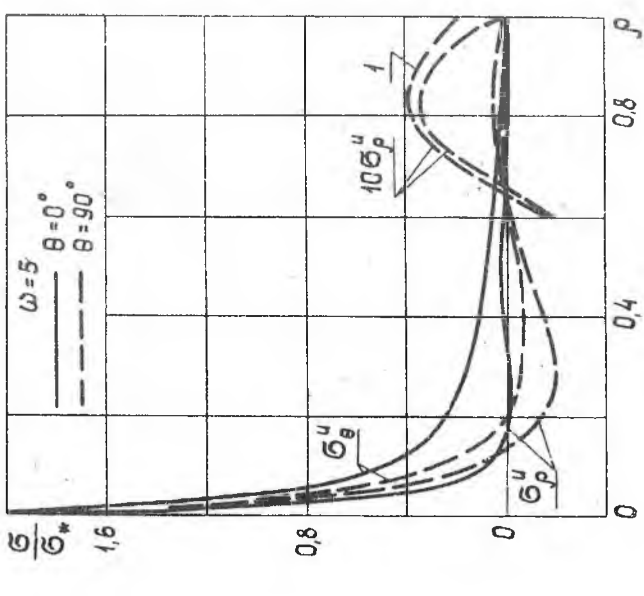
Сила $\mathcal{P}$, приложенная в центре панели, уравновешивается частично изгибными напряжениями, частично - напряжениями в срединной поверхности. Обозначим через $\mathcal{P}_1$ долю силы $\mathcal{P}$, уравновешиваемую на контуре $\rho = const$ напряжениями в срединной поверхности. Штрих-пунктирные кривые на рис.3 показывают изменение по ρ отношения $\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}}$ (кривая I - для

ж) Все графики в статье, за исключением специально оговоренных, построены применительно к случаю шарнирного опирания панели.



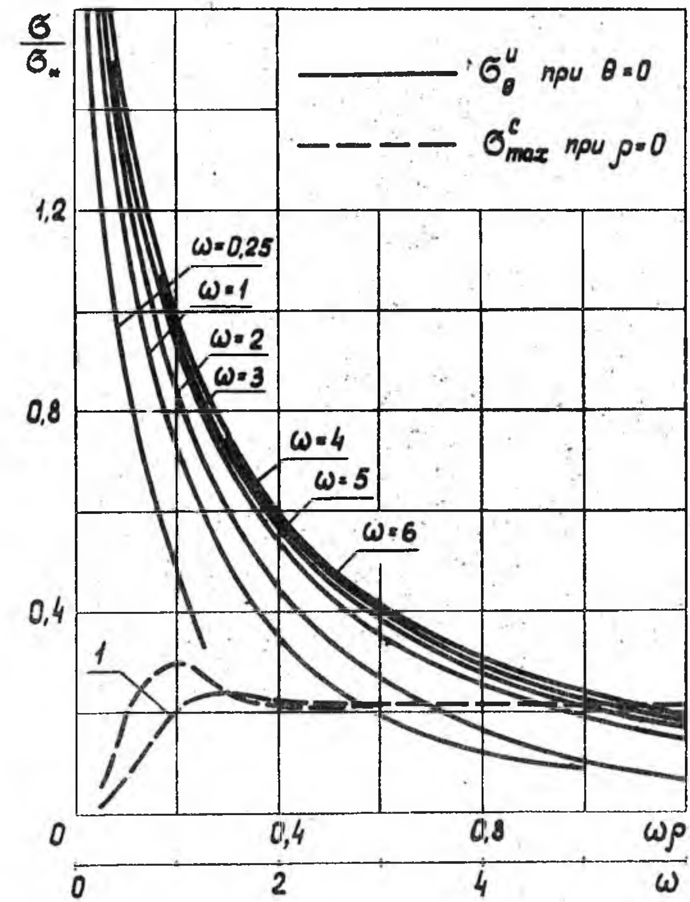
ω = 5
θ = 0°
θ = 90°
3
2
1
σ_ρ^c
σ_θ^c
σ/σ_*
0,2
0,1
0
1,0
0,5
0
0
0,4
0,8
ρ

Рис.3



ω = 5
θ = 0°
θ = 90°
σ_θ^u
σ_ρ^u
10σ_ρ^u
1
σ/σ_*
1,6
0,8
0
0
0,4
0,8
ρ

Рис.2



$\frac{\sigma}{\sigma_*}$
σ_θ^u при $\theta = 0$
σ_{max}^c при $\rho = 0$
1,2
0,8
0,4
0
$\omega = 0,25$
$\omega = 1$
$\omega = 2$
$\omega = 3$
$\omega = 4$
$\omega = 5$
$\omega = 6$
1
0,4
0,8
$\omega\rho$
0
2
4
ω

Рис.4

жесткого защемления). Начиная с $\rho > 0{,}3$, эта величина близка к единице. Некоторый рост ее в районе $\rho = 1$ объясняется влиянием краевых условий.

Сплошными линиями на рис.4 показано изменение изгибных напряжений σ_θ^u при $\theta = 0$ в зависимости от величины $\omega\rho$, которая при фиксированных R и δ пропорциональна расстоянию от точки приложения силы.

Начиная с $\omega = 3$ и выше, кривые достаточно близки друг к другу, особенно вблизи начала координат. На том же рисунке штриховыми линиями дана зависимость максимальных мембранных напряжений σ_{max}^c при $\rho = 0$ от параметра ω (кривая I – для жесткого защемления). График показывает, что σ_{max}^c для $\omega > 1{,}5$ практически не зависит от величины ω и от способа закрепления панели.

На рис.5 показано изменение максимального прогиба панели ($\rho = 0$) для случаев шарнирного опирания и жесткой заделки (кривая I) контура.

На основании приведенных исследований можно утверждать, что для оценки напряженного состояния цилиндрической оболочки в окрестности сосредоточенной нагрузки можно пользоваться результатами расчетов круговых искривленных панелей, как это предлагает Г.Н.Черныиев [4], причем схема с шарнирным опиранием контура является более предпочтительной.

Для случая, когда сила $\mathcal{P}$ приложена к панели через жесткое включение, граничные условия по линии спая запишутся в виде

при $\bar{\rho} = 0$ $\quad w^\circ + \bar{w} + a - c = 0, \quad u^\circ + \bar{u} - \frac{1}{2}\varkappa(a-c)(1-\cos 2\theta) = 0$

$$\frac{\partial w^\circ}{\partial \rho} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} = 0, \quad v^\circ + \bar{v} - \frac{1}{2}\varkappa(a-c)\sin 2\theta = 0, \qquad (4)$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1}, \qquad \rho_1 = \frac{r_1}{r_0},$$

c – жесткое смещение включения.

По наружному контуру панели, при $\bar{\rho} = 1$, граничные условия имеют вид (2) и (3). В решении (I) однородного уравнения следует при этом удержать как возрастающую, так и убывающую части.

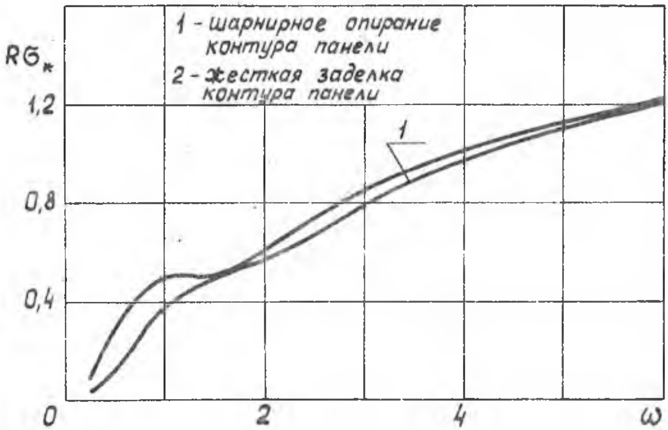

1 - шарнирное опирание
контура панели
2 - жесткая заделка
контура панели
$R\sigma_*$
1,2
0,8
0,4
0
2
4
ω
1

Рис.5

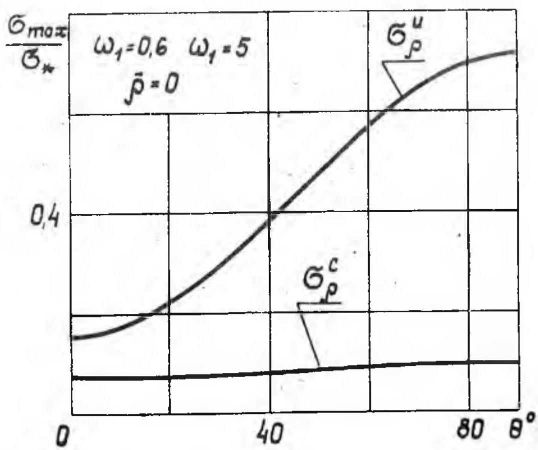

$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_*}$
$\omega_1=0,6$ $\omega_1=5$
$\bar{p}=0$
σ_p^u
σ_p^c
0,4
0
40
80
θ°

Рис.6

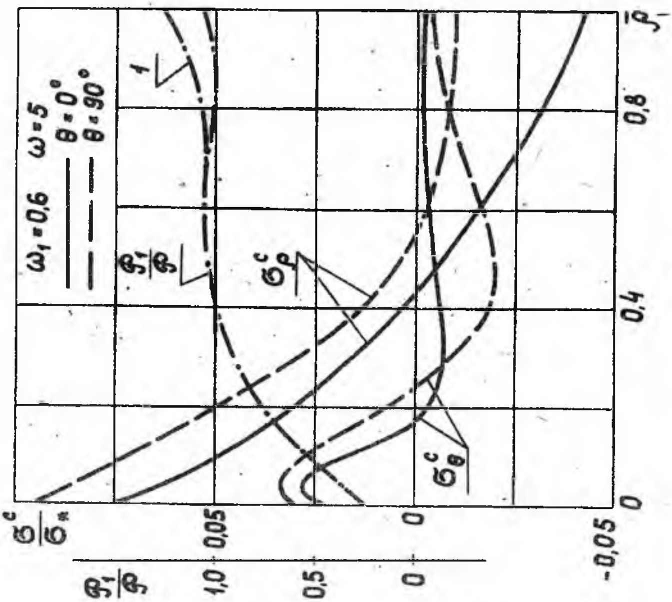

ω₁=0,6 ω=5
θ=0°
θ=90°
φ₁/φ
1
σ_ρ^c
σ_θ^c
σ^c/σ_*
0,05
0
-0,05
φ₁/φ
1,0
0,5
0
0,4
0,8
ρ

Рис.8

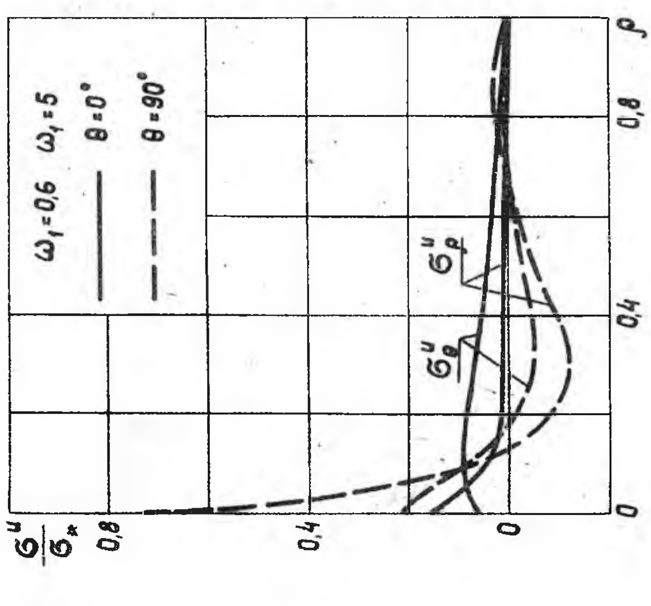

ω₁=0,6 ω₁=5
θ=0°
θ=90°
σ_θ^u
σ_ρ^u
σ^u/σ_*
0,8
0,4
0
0,4
0,8
ρ

Рис.7

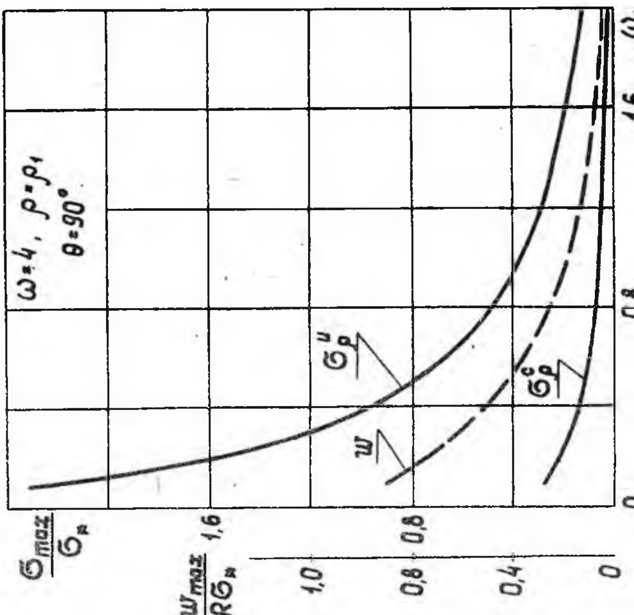

ω=4, ρ=ρ1
θ=90°
σ_p^u
w
σ_p^c
0
0,8
1,6
ω1
σmax/σ
wmax/Rσ
1,6
0,8
1,0
0,8
0,4
0

Рис.10

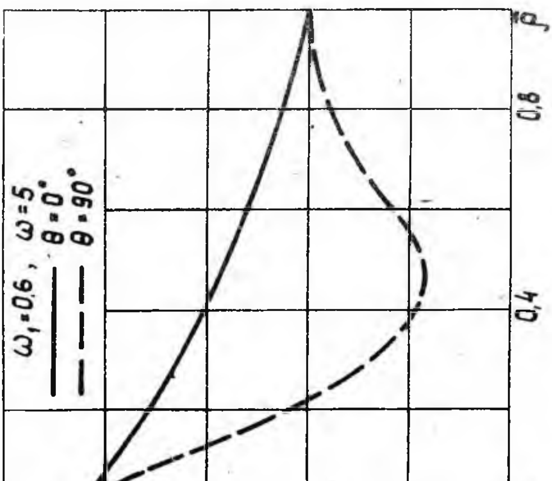

ω1=0,6 , ω=5
θ=0°
θ=90°
RG
0,4
0
-0,4
0
0,4
0,8
ρ

Рис.9

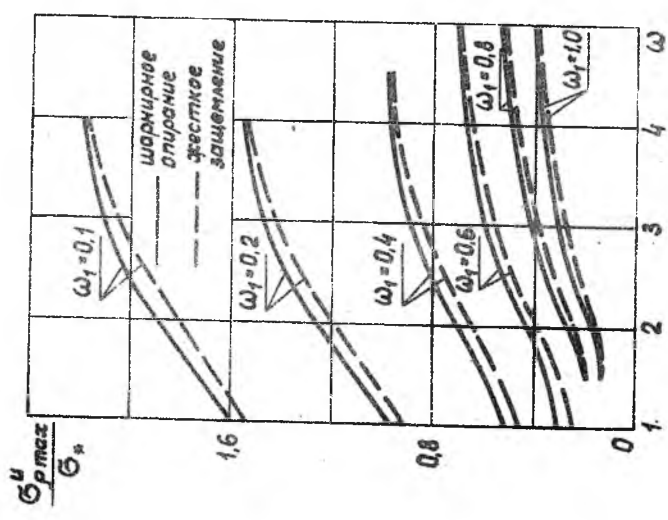

$\frac{\sigma^u_{p\,max}}{\sigma_*}$
1,6
0,8
0
1
2
3
4
ω
шарнирное опирание
жесткое защемление
$\omega_1 = 0{,}1$
$\omega_1 = 0{,}2$
$\omega_1 = 0{,}4$
$\omega_1 = 0{,}6$
$\omega_1 = 0{,}8$
$\omega_1 = 1{,}0$

Рис.II

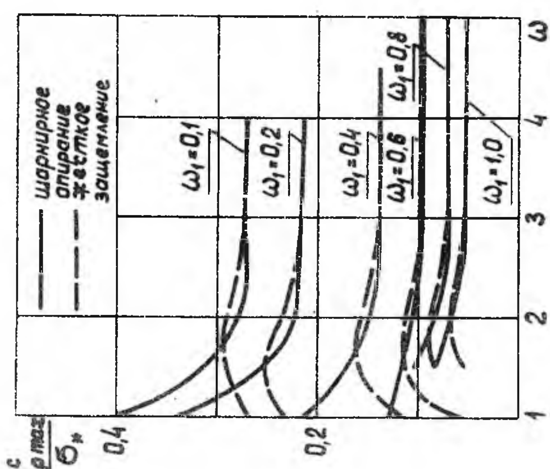

$\frac{\sigma^c_{p\,max}}{\sigma_*}$
0,4
0,2
1
2
3
4
ω
шарнирное опирание
жесткое защемление
$\omega_1 = 0{,}1$
$\omega_1 = 0{,}2$
$\omega_1 = 0{,}4$
$\omega_1 = 0{,}6$
$\omega_1 = 0{,}8$
$\omega_1 = 1{,}0$

Рис.I2

Размер включения характеризуется безразмерным параметром

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{r_1}{\sqrt{R\delta}} \qquad (5)$$

Характер изменения изгибных $\sigma_\rho^{и}$ и мембранных σ_ρ^{c} напряжений в панели по контуру спая с включением для $\omega_1 = 0{,}6$ и $\omega = 5$ показан на рис.6. Максимальных значений напряжения достигают при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ввиду отсутствия окружных деформаций здесь имеют место соотношения $\sigma_\theta^{и} = \mu\sigma_\rho^{и}$ и $\sigma_\theta^{c} = \mu\sigma_\rho^{c}$.

Зависимость напряжений и нормальных перемещений от $\bar{\rho}$ приведена на рис.7–9. Сплошные линии соответствуют $\theta = 0$, штриховые $\theta = \frac{\pi}{2}$. Штрих-пунктирными линиями на рис.8 показан закон изменения величины $\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}}$.

Влияние радиуса включения на максимальные напряжения в панели и перемещение включения w для $\omega = 4$ представлено на рис.IO. На рис.II и I2 показано для различных ω_1 влияние параметра ω на максимальные значения изгибных и мембранных напряжений в панели.

Из графиков видно, что с ростом ω имеет место тенденция к стабилизации σ_{max}. Характер закрепления наружного контура панели мало влияет на величину максимальных напряжений в системе.

Литература

I. Савін Г.М., О.М.Гузь. ДАН УРСР, №II, 1964.

2. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып.29, 1967.

3. Хазанов Х.С. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с подкрепленным круглым отверстием. Труды КуАИ, вып.39, 1968.

4. Чернышев Г.Н. О контактных задачах в теории оболочек. Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Наука, 1970.