КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С.П.КОРОЛЕВА

Труды, выпуск 69, 1974 г.

В.С.Асланов

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Рассматривается асимптотическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени. Известно, что численное интегрирование такой системы затруднительно из-за наличия высокочастотного компонента (колебание угла нутации $\theta$ ). В работе с помощью метода усреднения [1-2] исходная система уравнений приводится к новой системе приближенных дифференциальных уравнений, которые не содержат высокочастотного компонента. Этот метод позволяет получить решение для всего диапазона углов нутации $(0 < \theta < \pi)$ . Для рассматриваемой задачи в работах Кузмака Г.Е. [3-4] были получены асимптотические формулы, применение которых ограничено углами нутации, не превышающими одного радиана.

Рассмотрим пространственное движение твердого тела около неподвижной точки под воздействием момента силы притяжения $P$ и малого демпфирующего момента $\varepsilon M_q$ . При этом будем предполагать, что моменты слабо изменяются во времени и что эллипсоид инерции твердого тела относительно неподвижной точки $O$ есть эллипсоид вращения, а центр тяжести тела лежит на оси динамической симметрии на расстоянии $\ell$ от центра инерции. Пусть ось $O\zeta$ - неподвижная ось,направленная к притягивающему центру. Подвижную систему $Ox_1x_2x_3$ выберем так, чтобы ось $Ox_1$ была направлена по оси динамической симметрии, ось $Ox_2$ была бы перпендикулярна оси $Ox_1$ и лежала в плоскости, проходящей через оси $Ox_1$ и $O\zeta$ , а ось $Ox_3$ дополняла бы данную систему до правой прямоугольной. В этом случае угол между осями $O\zeta$ и $Ox_1$ есть угол нутации $\theta$, а моменты инерции относительно осей $Ox_2$ и $Ox_3$ равны одной и той же величине $\mathcal{J}_3$. Малый демпфирующий момент задан в проекциях $\varepsilon M_1^{\omega_1}\omega_1$, $\varepsilon M_2^{\omega_2}\omega_2$, $\varepsilon M_3^{\omega_3}\omega_3$ на оси подвижной системы $Ox_1x_2x_3$, где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - проекции вектора угловой скорости тела на те же оси, $M_1^{\omega_1}, M_2^{\omega_2}, M_3^{\omega_3}$ - вращательные производные. Вводя обозначения $G = \mathcal{J}_1\omega_1\cos\theta/\mathcal{J}_3 - \omega_2\sin\theta, \tau = \mathcal{J}_1\omega_1/\mathcal{J}_3$, где $\mathcal{J}_1$ - момент инерции относительно оси $Ox_1$, а $G, \tau$ - с точностью до множителя проекции кинетического момента на оси $O\zeta$ $Ox_1$, $n$, и учитывая также, что $\omega_3 = d\theta/dt$, уравнения движения твердого тела можно записать [3] в виде

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(G-\tau\cos\theta)(\tau-G\cos\theta)}{\sin^3\theta} - M(\tau) = \varepsilon\cdot m_3(\tau)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon\cdot m_1(\tau)\cdot\tau,$$

$$\frac{dG}{dt} = \varepsilon\left\{m_2(\tau)\cdot G + [m_1(\tau) - m_2(\tau)]\tau\cdot\cos\theta\right\},$$

$$M(\tau) = -g(\tau)\sin\theta, \qquad m_1\tau = \frac{M_1^{\omega_1}(\tau)}{\mathcal{J}_3}, \tag{I}$$

$$m_2(\tau) = \frac{M_2^{\omega_2}(\tau)}{\mathcal{J}_3}, \qquad m_3(\tau) = \frac{M_3^{\omega_3}(\tau)}{\mathcal{J}_3}.$$

Здесь $\varepsilon$ - малый параметр, $\tau = \varepsilon t + const$ - "медленное" время, $g(\tau) = P(\tau)\cdot l/\mathcal{J}_3$ - жесткость системы. Система (I) представляет собой нелинейную колебательную систему с медленно меняющимися параметрами.

При $\varepsilon = 0$ эта система сводится к одному уравнению невозмущенного движения (случай Лагранжа):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(G-\tau\cos\theta)(\tau-G\cos\theta)}{\sin^3\theta} + g\sin\theta = 0. \tag{2}$$

Поскольку уравнение (2) не содержит явным образом времени, то без ограничения общности за начальные условия могут быть приняты следующие: $\theta(t_0) = \theta_0$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0} = 0$. Тогда общий интеграл этого уравнения запишется в виде

$$\theta = \arccos\left[(f-x)cn^2\left(\frac{2K}{\pi}y + K, \kappa\right) + x\right]. \tag{3}$$

Здесь $x = \cos\theta_0$, $y = \omega(t+t_0)$, $K(\kappa)$ - полный эллиптический интеграл I рода, $cn(u,\kappa)$ - эллиптический косинус, $\kappa$ - модуль эллиптических функций, $\beta = \sqrt{g\varphi}$ – частота колебательного процесса,

$$f = \varphi - \frac{G^2 + \tau^2 - 2G\tau x}{4g(1-x^2)}, \qquad \omega = \frac{\pi\beta}{2K}$$

$$K = \sqrt{\frac{f-x}{2\varphi}}\,; \quad \varphi = \sqrt{1 - \frac{(G^2+\tau^2)x - 2G\tau}{2g(1-x^2)} + \left(\frac{G^2+\tau^2-2G\tau x}{4g(1-x^2)}\right)^2}\,. \tag{4}$$

Интеграл невозмущенного движения (3) и его частные производные являются периодическими функциями переменной $y$ периода $2\pi$.

Решение системы (I) будем искать в виде (3), рассматривая величины $x$ и $y$ как функции "медленного" времени $\tau$. Используя метод вариации произвольных постоянных, заменим первое уравнение системы (I) двумя уравнениями относительно $x$ и $y$ и осредним их по периоду "быстрой" переменной $y$ (см. [2])

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}(m_3\omega\theta_y^2 + \xi_1)\,dy, \\ \frac{dy}{dt} &= \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}(m_3\omega\theta_x\theta_y + \xi_2)\,dy, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Delta(x,\tau) = (\theta_x\theta_{yy} - \theta_y\theta_{xy})\omega - \omega_x\theta_y^2$,

$$\xi_1(x,y,\tau) = (\theta_\tau\theta_{yy} - \theta_y\theta_{\tau y})\omega - \omega_\tau\theta_y^2,$$

$$\xi_2(x,y,\tau) = (\theta_\tau\theta_{xy} - \theta_x\theta_{\tau y})\omega - \omega_x\theta_y\theta_\tau - \omega_\tau\theta_x\theta_y.$$

Здесь нижний индекс означает частную производную по указанной переменной.

Подынтегральная функция во втором уравнении системы (5) есть нечетная функция аргумента $y$, поэтому интеграл от этой функции, взятый по периоду $2\pi$, равен нулю. Вычислим интеграл, входящий в первое уравнение системы (5), применяя при этом известные формулы для интегралов от эллиптических функций [5]. Вместе с двумя последними уравнениями системы (I) полная осредненная система уравнений запишется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\left[\left(\frac{\varphi\cdot g_\tau}{2\beta^2} + \frac{g\varphi_\tau}{2\beta^2} - m_3\right)J - f_\tau J_1 - \varphi_\tau J_2\right],$$

$$\frac{dy}{dt}=\omega(\tau),\qquad \frac{dr}{dt}=\varepsilon\cdot m_1(\tau)\,r\,,$$

$$\frac{dG}{dt}=\varepsilon\left\{m_2(\tau)\cdot G+\left[m_1(\tau)-m_2(\tau)\right]r\cdot\cos\theta\right\},$$

$$J=\frac{4\beta}{\pi}\Big[2k^2(1+n_1+n_2)K(k)+2E(k)-(1-x)(1+k^2n_1)\Pi\Big(k,\frac{1}{n_1}\Big)-$$

$$-(1+x)(1+k^2n_2)\Pi\Big(k,\frac{1}{n_2}\Big)\Big],$$

$$J_1=\frac{2\beta}{\pi}\Big\{2k^2(n_1-n_2)K(k)-\Big[\frac{1}{n_1}+1+2k^2(1+n_1)\Big]\Pi\Big(k,\frac{1}{n_1}\Big)+$$

$$+\Big[\frac{1}{n_2}+1+2k^2(1+n_2)\Pi\Big(k,\frac{1}{n_2}\Big)\Big]\Big\}, \qquad (6)$$

$$J_2=\frac{4\beta k^2}{\pi}\Big\{\big[n_2-n_1+k^2n_1(1+n_1)-k^2n_2(1+n_2)\big]K(k)+$$

$$+(n_1-n_2)E(k)-n_1(1+n_1)\Pi\Big(k,\frac{1}{n_1}\Big)+n_2(1+n_2)\Pi\Big(k,\frac{1}{n_2}\Big)\Big\},$$

$$\Delta=\frac{4K(1-k^2)(f-x)\beta}{\pi(1-x^2)},$$

$$n_1=\frac{1-f}{f-x}\,,\qquad n_2=-\frac{1+f}{f-x},$$

$$f_\tau=f_g\,g_\tau+f_G\,G_\tau+f_r\cdot r_\tau\,,\qquad \varphi_\tau=\varphi_g\,g_\tau+\varphi_G\,G_\tau+\varphi_r\,r_\tau.$$

Здесь $E(k)$, $\Pi(k,n)$ – полные эллиптические интегралы II и III рода. Жесткость системы $g(\tau)$ и ее производная $g_\tau(\tau)$ определяются законом задания силового поля. Производные $\varphi_g$, $\varphi_G$, $\varphi_r$, $f_g$, $f_G$, $f_r$ можно получить путем дифференцирования выражений (4) для $f$ и $\varphi$ :

$$\varphi_g=\frac{1}{4\varphi}\Big[\frac{bx-c}{g^2(1-x^2)}-\frac{(b-cx)^2}{4g^3(1-x^2)^2}\Big],$$

$$\varphi_G=\frac{1}{2\varphi}\Big[\frac{r-Gx}{g(1-x^2)}+\frac{(b-cx)(G-rx)}{4g^2(1-x^2)^2}\Big],$$

$$\varphi_r=\frac{1}{2\varphi}\Big[\frac{G-rx}{g(1-x^2)}+\frac{(b-cx)(r-Gx)}{4g^2(1-x^2)^2}\Big],$$

$$f_g=\varphi_g+\frac{b-cx}{4g^2(1-x^2)},$$

$$f_G = \varphi_G + \frac{\tau x - G}{2g(1-x^2)},$$

$$f_\tau = \varphi_\tau + \frac{Gx - \tau}{2g(1-x^2)}.$$

Здесь $b = G^2 + \tau^2$, $c = 2G\tau$.

Правая часть первого уравнения есть достаточно гладкая функция аргумента $x$, зависящая от четырех полных эллиптических интегралов $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(k, \frac{1}{n_1})$, $\Pi(k, \frac{1}{n_2})$.

Итак, осредненная система уравнений (6) с точностью до величин $O(\varepsilon)$ определяет исходную систему (I) и в отличие от нее не содержит высокочастотного компонента. Поэтому численное интегрирование осредненной системы требует значительно меньших затрат машинного времени.

В качестве примера использования осредненной системы рассмотрим неуправляемое движение твердого тела относительно центра масс в атмосфере. Как показано в [3], движение тела относительно центра масс описывается системой уравнений (I), в которой угол нутации $\theta$ следует заменить на пространственный угол атаки $\alpha$, а жесткость системы определять как $g(\tau) = m_3^\alpha(\tau) q(\tau) \cdot L \cdot S / J_3$, где $q(\tau)$ -скоростной напор, $m_3^\alpha(\tau)$ - производная коэффициента восстанавливающей момента по углу атаки $\alpha$, $L, S$ - характерный размер и характерная площадь тела. Проводилось численное интегрирование системы уравнений (I) и осредненной системы (6). Были просчитаны три варианта со следующими начальными условиями:

I. $H_0 = 95$ км, $G_0 = -0{,}27$ сек$^{-1}$, $\tau_0 = -0{,}20$ сек$^{-1}$

2. $H_0 = 95$ км, $G_0 = -0{,}54$ сек$^{-1}$, $\tau_0 = -0{,}40$ сек$^{-1}$

3. $H_0 = 75$ км, $G_0 = -0{,}54$ сек$^{-1}$, $\tau_0 = -0{,}40$ сек

где $H_0$ - начальная высота полета. В начальный момент $\alpha_0 = I50$ $(d\alpha/dt)_{t_0} = 0$.

Таблица

| Вариант начальных условий / $H$ км | I | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Численное интегрирование | Асимптотика | Численное интегрирование | Асимптотика | Численное интегрирование | Асимптотика |
| 60 | 33,9 | 33,9 | 42,5 | 42,2 | 80,3 | 80,[illegible] |
| 35 | 22,3 | 22,4 | 27,9 | 27,6 | 52,0 | 5I,8 |
| I0 | 39,4 | 39,3 | 49,3 | 50,0 | 93,7 | 94,5 |

В таблице приведены значения максимального угла атаки в градусах на высотах 60, 35, 10 км для различных вариантов начальных условий.

В рассматриваемом примере при хорошем совпадении с точным численным решением системы (I) на интегрирование осредненной системы требуется в 10 - 20 раз меньше машинного времени.

## Литература


I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1963.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. "Наука", 1969.
3. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. "Наука", 1970.
4. Кузмак Г.Е. Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени. Известия АН СССР , ОТН, „Механика и машиностроение", 1961, № 4, 65-73.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Физматгиз, 1963.