КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА

Труды, выпуск 66, 1973 г.

В.И.Леонов, Х.С.Хазанов

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК, ПРИВОДЯЩИХСЯ К ИЗГИБАЮЩЕМУ МОМЕНТУ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЗУЮЩЕЙ

Исследуется круговая цилиндрическая оболочка с радиусом срединной поверхности R и толщиной δ под действием локальных нагрузок, приводящихся к моменту относительно образующей цилиндра $\mathcal{M}_\xi$. Рассматриваются 3 схемы нагружения:

Задача I. К оболочке приложен сосредоточенный момент.

Задача 2. Момент передается на оболочку через жесткое включение радиуса r_1.

Задача 3. К упругому включению радиуса r_1 и толщины δ_1 приложена поверхностная нагрузка $q_n = \frac{4\mathcal{M}_\xi}{\pi r_1^4} r \sin\theta$.

При решении используется приближенный подход, предложенный Г.Н.Чернышевым [I], согласно которому расчет оболочки заменяется расчетом панели (в нашем случае - круглой, радиуса r_0), вырезанной из цилиндрической оболочки (рис. I). Если размеры панели выбраны достаточно большими, то в зоне приложения нагрузки это решение будет с достаточной точностью совпадать с решением для оболочки.

Напряженное состояние панели описывается уравнением пологой цилиндрической оболочки [2] относительно комплексной функции $F = w + i\Phi$ (w - нормальное перемещение, Φ - функция напряжения).Для рассматриваемого случая симметрии напряжен-

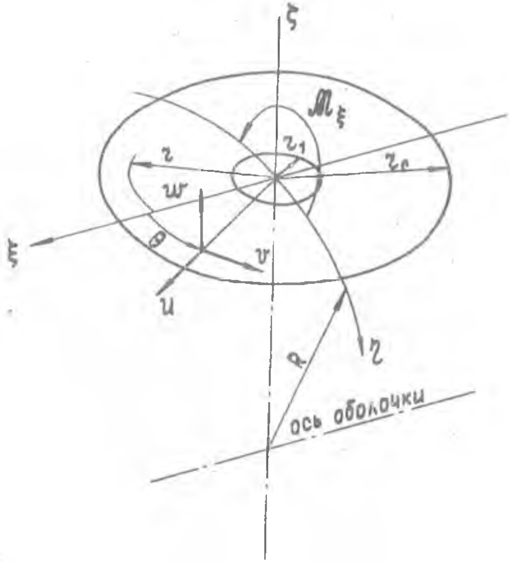


Рис. I.

ного состояния решение однородного уравнения пологой оболочки в полярных координатах $\rho = \frac{r}{r_0}$, θ приведено в [3] к виду

$$F(z,\theta) = \sum_{\nu=1,3\ldots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1}\left[A_n H_n^{(1)}(z) + B_n J_n(z)\right]\left[J_{n-\nu}(z) + J_{n+\nu}(z)\right]\sin\nu\theta, \quad (\mathrm{I})$$

где $z = x\sqrt{2i}$, $x = \omega\rho$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{r_0}{\sqrt{R\delta}}$.

$A_n = a_n + i b_n$, $B_n = c_n + i d_n$ – комплексные постоянные. Через $J_n(z)$, $H_n^{(1)}(z)$ обозначены функция Бесселя первого рода и первая функция Ганкеля.

Анализ решения (I) показал, что для соответствующих ему усилий в сечениях оболочки главный вектор и главный момент равны нулю. Поэтому добавим к нему фундаментальное решение уравнения пологой цилиндрической оболочки, соответствующее сосредоточенному моменту $\mathcal{M}_\xi$ [4, 5] :

$$F^{0}(z,\theta)=-\frac{16(1-i)\omega^{3}\lambda}{\pi E \varkappa r_{0}^{2}}\mathcal{M}_{\xi}\sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} i^{\nu-1}\mathcal{P}_{k}(z)\left[J_{k-\nu}(z)+J_{k+\nu}(z)\right]\sin\nu\theta, \quad (2)$$

где $\lambda=\frac{R}{\delta}$, $\varkappa=\frac{r_0}{R}$, $\mathcal{P}_k(z)=\left.\frac{\partial J_\mu(z)}{\partial\mu}\right|_{\mu=k}$.

С использованием известных соотношений теории пологой оболочки в [3] получены ряды для усилий в сечениях оболочки и для перемещений в ее срединной поверхности, соответствующие решению (I). Аналогичные ряды могут быть получены и для решения (2).

Задача I. Из условий в начале координат в решении (I) следует удержать только возрастающую часть, т.е. положить $A_n = 0$.

Граничные условия для шарнирного опирания контура панели при $\rho = 1$ имеют вид

$$M_\rho^0+\bar{M}_\rho=0,\quad u^0+\bar{u}-\frac{1}{8}\varkappa\psi r_0(3\sin\theta-\sin3\theta)+b\sin\theta=0,$$

$$w^0+\bar{w}+\psi r_0\sin\theta=0,\quad v^0+\bar{v}-\frac{1}{8}\varkappa\psi r_0(\cos\theta-\cos3\theta)+b\cos\theta=0, \quad (3)$$

где ψ и b - жесткий поворот и жесткое смещение.

При защемлении контура панели первое граничное условие системы (3) заменяется на

$$\frac{\partial w^0}{\partial\rho}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial\rho}+\psi r_0\sin\theta=0. \quad (3а)$$

Индексом "0" сверху обозначены величины, соответствующие решению (2), черточкой сверху - величины, соответствующие (I).

Приравняв нулю в каждом уравнении системы (3) члены, содержащие одинаковые тригонометрические функции, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно c_n, d_n, ψ и b. Заменяя бесконечные ряды конечными суммами, приходим к замкнутой системе уравнений.

Ниже приведены результаты числовых подсчетов, выполненных на ЭВМ БЭСМ-4 при значениях коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}3$.

На рис. 2 показано распределение напряжений и нормальных перемещений w для шарнирно опертой панели при $\omega = 5$.

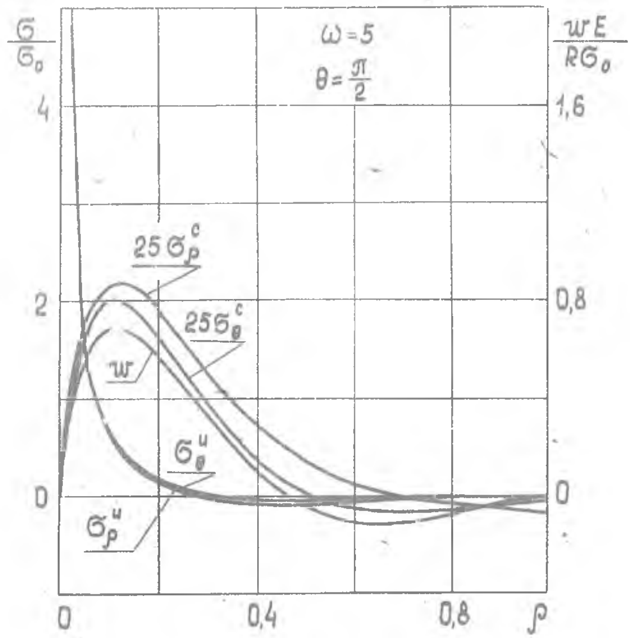


Рис. 2.

Напряжения отнесены к $\sigma_0 = \frac{\mathcal{M}_\xi}{\sqrt{R\delta}\,\delta^2}$. Изгибные напряжения $\sigma_\rho^и$ и $\sigma_\theta^и$ в окрестности точки приложения момента имеют особенность вида $\frac{1}{\rho}$. Мембранные напряжения весьма невелики и показаны на графике в 25-кратном масштабе.

<u>Задача 2</u>. В решении (I) удерживаются как возрастающая, так и убывающая части. Размер жесткого включения будем характеризовать параметром

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{r_1}{\sqrt{R\delta}} \qquad (4)$$

Введем безразмерный параметр $\bar\rho = \frac{\rho-\rho_1}{1-\rho_1}$, $\rho_1 = \frac{r_1}{r_0}$.
Граничные условия по линии спая панели с жестким включе-

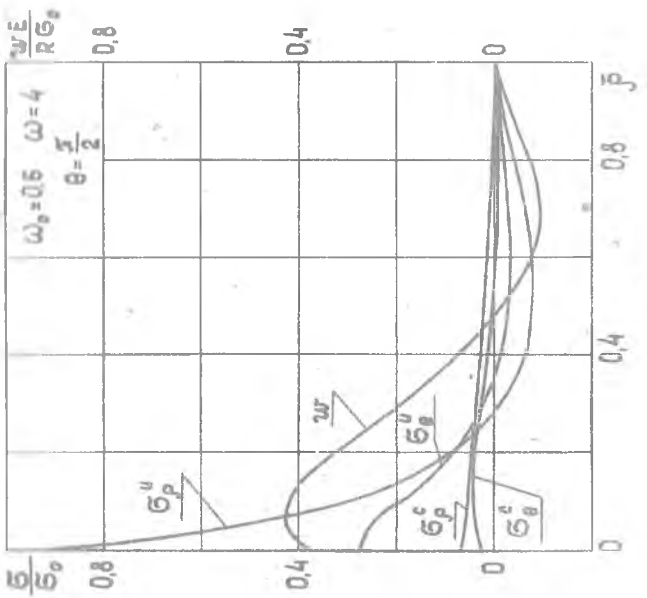

$\omega_0=0{,}6$ $\omega=4$
$\theta=\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
$\frac{wE}{R\sigma_0}$
0,8
0,4
0
0,4
0,8
$\bar{\rho}$
w
σ_θ^u
σ_ρ^u
σ_ρ^c
σ_θ^c

Рис. 4

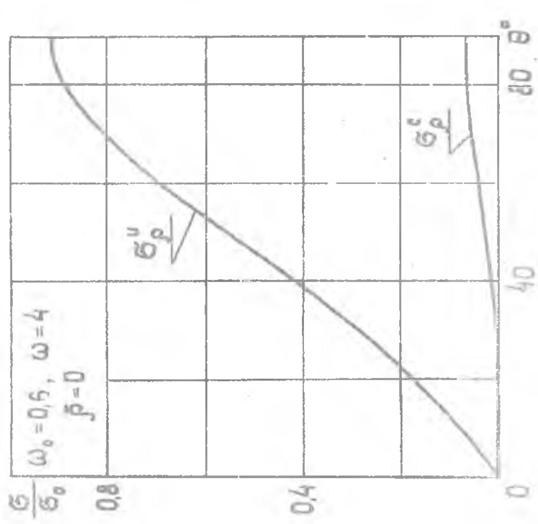

$\omega_0=0{,}6$, $\omega=4$
$\bar{\rho}=0$
$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
0,8
0,4
0
40
80
$\theta°$
σ_ρ^u
σ_ρ^c

Рис. 3

нием при $\bar{\rho} = 0$ запишутся в виде

$$w^\circ + \bar{w} + (\psi-\varphi)\tau_1 \sin\theta = 0, \quad u^\circ + \bar{u} - \frac{1}{8}\varkappa(\psi-\varphi)\tau_1\rho_1(3\sin\theta - \sin 3\theta) + (b-a)\sin\theta = 0,$$

$$\frac{\partial w^\circ}{\partial\rho} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\rho} + (\psi-\varphi)\tau_1\sin\theta = 0, \quad v^\circ + \bar{v} - \frac{1}{2}\varkappa(\psi-\varphi)\tau_1\rho_1(\cos\theta - \cos 3\theta) + (b-a)\cos\theta = 0, \qquad (5)$$

где φ и a – жесткий поворот включения и жесткое смещение.

По наружному контуру панели $\bar{\rho}$ = I граничные условия имеют вид (3) и (3а).

Характер изменения изгибных σ_ρ^u и мембранных σ_ρ^c напряжений по линии спая панели с включением для $\omega_0 = 0{,}6$ и $\omega = 4$ показан на рис. 3. Ввиду отсутствия окружных деформаций здесь имеют место соотношения $\sigma_\theta^u = \mu\sigma_\rho^u$ и $\sigma_\theta^c = \mu\sigma_\rho^c$. Зависимость напряжений и нормальных перемещений от $\bar{\rho}$ представлена для $\theta = \frac{\pi}{2}$ на рис. 4. Из рис. 5 видно, что при фиксированных значениях размеров жесткого включения радиус панели несущественно влияет на максимальные напряжения в ней. Незначительно влияет и способ закрепления панели (шарнирное опирание – сплошные линии, жесткая заделка – штриховые линии) Зависимость максимальных напряжений от размеров жесткого включения для $\omega = 4$ показана на рис. 6.

Задача 3. Предполагается, что панель и включение имеют общую срединную поверхность. Для области упругого включения в решении вида (I) удерживается только возрастающая часть

$$F(z,\theta) = \sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1} D_n J_n(z_1)[J_{n-\nu}(z_1) + J_{n+\nu}(z_1)] \sin\nu\theta, \qquad (6)$$

где $z_1 = x_1\sqrt{2i}$, $x_1 = \omega_1\rho_1$, $\rho_1 = \frac{r}{r_1}$, $\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\frac{r_1}{\sqrt{R\delta_1}}$.

К решению (6) следует добавить частное решение неоднородного уравнения пологой цилиндрической оболочки, соответствующее заданной поверхностной нагрузке, которое имеет вид

$$\overset{*}{F}(z,\theta) = \frac{16R\lambda_1}{\pi E\omega_1 r_1^3} \mathcal{M}_\xi\left(\frac{27}{4}x_1 - i x_1^3\right)\sin\theta, \qquad \lambda_1 = \frac{R}{\delta_1} \qquad (7)$$

Для панели берется решение (I) однородного уравнения и фундаментальное решение (2). Постоянные интегрирования определяются из условий сопряжения упругого включения и панели а также из граничных условий на наружном контуре панели.

Как и в предыдущей задаче, наружный радиус панели и способ ее закрепления влияет на максимальные напряжения в

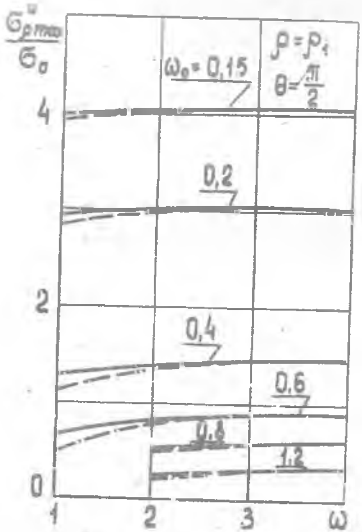

$\frac{\sigma^{u}_{\rho\,max}}{\sigma_0}$
$\rho=\rho_1$
$\theta=\frac{\pi}{2}$
$\omega_0=0{,}15$
0,2
0,4
0,6
0,8
1,2
4
2
0
1
2
3
ω

Рис. 5

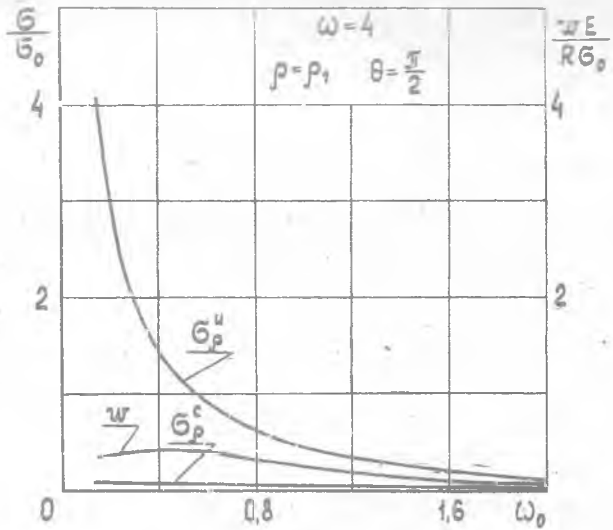
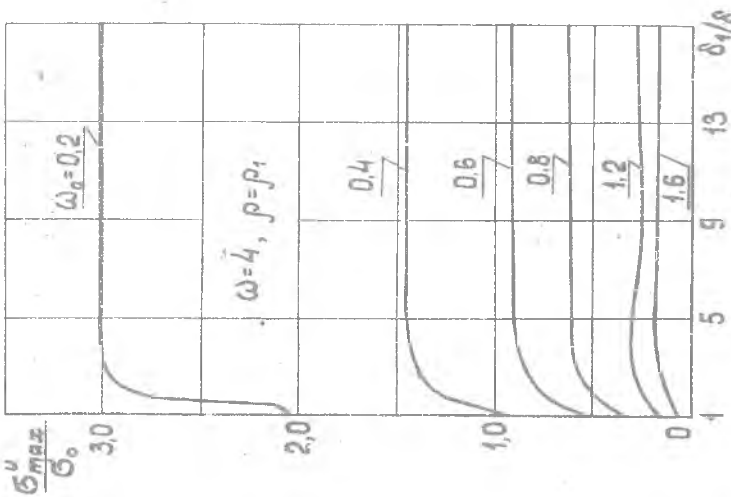
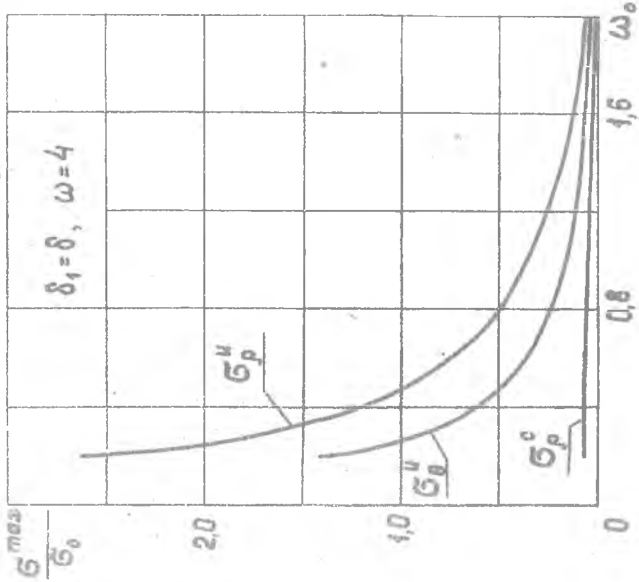

$\frac{\sigma}{\sigma_0}$
$\omega=4$
$\rho=\rho_1$ $\theta=\frac{\pi}{2}$
$\frac{w E}{R \sigma_0}$
σ^{u}_{ρ}
σ^{c}_{ρ}
w
4
2
0
0,8
1,6
ω_0

Рис. 6



$\frac{\sigma^{u}_{max}}{\sigma_0}$
3,0
2,0
1,0
0
1
5
9
13
δ_1/δ
$\omega_0=0,2$
$\omega=4,\ \rho=\rho_1$
0,4
0,6
0,8
1,2
1,6

Рис. 8



$\frac{\sigma^{max}}{\sigma_0}$
2,0
1,0
0
0,8
1,6
ω_0
$\delta_1=\delta,\ \omega=4$
σ^{u}_{ρ}
σ^{u}_{θ}
σ^{c}_{ρ}

Рис. 7

системе несущественно. Зависимость максимальных напряжений в панели для случая $\delta_1 = \delta$ от размеров площадки нагружения приведена на рис. 7. При этом следует иметь в виду, что изгибные напряжения σ_ρ^u и σ_θ^u достигают наибольших значений в пределах площадки нагружений (при $r/r_1 \approx 0{,}7$).

Влияние толщины упругого включения на наибольшие напряжения для различных значений ω_o показано на рис. 8.

В отличие от аналогичной задачи для поверхностной нагрузки, приводящейся к моменту $\mathcal{M}_\eta$ [6], увеличение толщины упругого включения приводит к довольно значительному росту максимальных напряжений. Однако для $\delta_1/\delta \geqslant 3$ максимальные напряжения незначительно отличаются от их значений в панели с жестким включением. В этих пределах подтверждаются выводы, полученные А.В.Саченковым и Ю.Г. Коноплевым [7] .

Литература

I. Чернышев Г.Н. О контактных задачах в теории оболочек. В сб. "Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок", Наука, 1970.
2. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек, ОГИЗ, 1947.
3. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
4. Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.
5. Леонов В.И., Хазанов Х.С. Фундаментальное решение уравнения пологой цилиндрической оболочки в полярных координатах. Труды КуАИ, вып. 63, 1972.
6. Леонов В.И., Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 60, 1973.
7. Коноплев Ю.Г., Саченков А.В. В сб. "Исследования по теории пластин и оболочек" № 4, изд-во КГУ, Казань, 1966.