УДК 539.3:624.074

И.С.Ахмедьянс

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ (МЕТОД ПАРАБОЛ)

В статье рассматривается численный метод нахождения частног решения разрешающей системы неоднородных уравнений изгиба сфери- ческой оболочки при действии поверхностной нагрузки, симметричнс относительно некоторой меридиональной плоскости.

I. Если поверхностная нагрузка, приложенная к сферической оболочке, симметрична относительно плоскости меридиана $\varphi = 0$ и представлена в форме рядов (3) /I/, то задача исследования напря женно-деформированного состояния оболочки может быть сведена к интегрированию следующей неоднородной системы уравнений (здесь и в дальнейшем использованы обозначения, принятые в /I/):

$$L_n(\varepsilon_{qn}) + (1+\mu)\varepsilon_{qn} + (1-\mu)\varkappa_{qn} = \chi_{qn} - \Phi_{qn},$$
$$L_n(\varkappa_{qn}) + (1-\mu)\varkappa_{qn} - \nu(1+\mu)\varepsilon_{qn} = -\nu\chi_{qn}. \tag{I}$$

Здесь

$$\Phi_{qn} = \frac{m(1-\mu^2)}{E}\left(q'_{xn} + q_{xn}\operatorname{ctg}\varphi + \frac{n}{\sin\varphi} q_{yn}\right), \quad \chi_{qn} = \frac{m(1-\mu^2)}{E} q_{zn},$$

$$m = \frac{R}{h}, \quad \nu = 12m^2, \quad (\ )' = \frac{d}{d\varphi}(\ ),$$

$$L_n = \frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{d}{d\varphi} - \frac{n^2}{\sin^2\varphi}.$$

Для отыскания частного решения системы (I) преобразуем ее к двум интегральным уравнениям:

$$y = Y^* - (1+\mu)Y - (1-\mu)Z + A + U - V,$$
$$z = Z^* - (1-\mu)Z + \nu(1+\mu)Y + B - \nu U, \tag{2}$$

где

$$y = \varepsilon_{qn}, \quad z = \varkappa_{qn}, \quad Y = L(y), \quad Y^* = L\left(\frac{n^2}{\sin^2\varphi} y\right),$$

$$Z = L(z), \quad Z^* = L\left(\frac{n^2}{\sin^2\varphi} z\right), \quad U = L(\chi_{qn}), \quad V = L(\Phi_{qn}),$$

$$A(\psi) = \varepsilon_{qn}(\psi_o) + \varepsilon'_{qn}(\psi_o) \sin\psi_o \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\psi_o}{2}},$$

$$B(\psi) = \text{æ}_{qn}(\psi_o) + \text{æ}'_{qn}(\psi_o) \sin\psi_o \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\psi_o}{2}};$$

L - интегральный оператор:

$$L(f) = \int\limits_{\psi_o}^{\psi} \frac{1}{\sin\psi} \int\limits_{\psi_o}^{\psi} f \sin\psi \, d\psi \, d\psi ,$$

ψ_o - начальное значение угла ψ ($\psi_o \neq 0$).

Полагая в (2)

$$\psi = \psi_i = \psi_o + it ,$$

где t - шаг интегрирования (i = I,2,...), будем иметь следующие два соотношения, эквивалентные (2), при $\psi = \psi_i$:

$$\begin{aligned} y_i &= Y_i^* - (1+\mu) Y_i - (1-\mu) Z_i + A_i + U_i - V_i , \\ z_i &= Z_i^* - (1-\mu) Z_i + \nu (1+\mu) Y_i + B_i - \nu U_i , \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$Y_i = Y(\psi_i), \quad Y_i^* = Y^*(\psi_i), \ldots, \quad V_i = V(\psi_i).$$

Применяя далее к интегралам Y_i , Y_i^* и Z_i , Z_i^* формулу приближенного интегрирования /2/ по методу Симпсона, устанавливаем, что при $i \geqslant 3$:

$$Y_i = \frac{t^2}{9} y_i + F_i , \qquad Y_i^* = \frac{t^2}{9} \frac{n^2}{S_i^2} y_i + F_i^* , \tag{4}$$

$$Z_i = \frac{t^2}{9} z_i + G_i , \qquad Z_i^* = \frac{t^2}{9} \frac{n^2}{S_i^2} z_i + G_i^* . \tag{5}$$

Здесь

$$F_i = Y_{i-2} + \frac{t^2}{9} R_i = F_{i-2} + \frac{t^2}{9} (R_i + y_{i-2}), \tag{6}$$

$$G_i = Z_{i-2} + \frac{t^2}{9} T_i = G_{i-2} + \frac{t^2}{9} (T_i + z_{i-2}), \tag{7}$$

$$F_i^* = Y_{i-2}^* + \frac{n^2 t^2}{9} R_i^* = F_{i-2}^* + \frac{n^2t^2}{9} (R_i^* + \frac{y_{i-2}}{S_{i-2}^2}), \tag{8}$$

$$G_i^* = z_{i-2}^* + \frac{n^2t^2}{9} T_i^* = G_{i-2}^* + \frac{n^2t^2}{9}\left(T_i^* + \frac{z_{i-2}}{S_{i-2}^2}\right).$$

В формулах (6) и (8)

$$R_i = \left(\frac{1}{S_{i-2}} + \frac{1}{S_i}\right)\left(\frac{\alpha}{4} + \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{i-4}\right) +$$
$$+ \frac{4}{S_{i-1}}\left(\alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-3}\right) + \frac{1}{S_i}\left(y_{i-2}S_{i-2} + 4y_{i-1}S_{i-1}\right)$$

$$R_i^* = \left(\frac{1}{S_{i-2}} + \frac{1}{S_i}\right)\left(\frac{a}{4} + a_1 + a_3 + \ldots + a_{i-4}\right) +$$
$$+ \frac{4}{S_{i-1}}\left(a_0 + a_2 + \ldots + a_{i-3}\right) + \frac{1}{S_i}\left(\frac{y_{i-2}}{S_{i-2}} + 4\frac{y_{i-1}}{S_{i-1}}\right)$$

для нечетного i ($i = 5,7,9,\ldots$) и

$$R_i = \left(\frac{1}{S_{i-2}} + \frac{1}{S_i}\right)\left(\alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-4}\right) +$$
$$+ \frac{4}{S_{i-1}}\left(\frac{\alpha}{4} + \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{i-3}\right) + \frac{1}{S_i}\left(y_{i-2}S_{i-2} + 4y_{i-1}S_{i-1}\right)$$

$$R_i^* = \left(\frac{1}{S_{i-2}} + \frac{1}{S_i}\right)\left(a_0 + a_2 + \ldots + a_{i-4}\right) +$$
$$+ \frac{4}{S_{i-1}}\left(\frac{a}{4} + a_1 + a_3 + \ldots + a_{i-3}\right) + \frac{1}{S_i}\left(\frac{y_{i-2}}{S_{i-2}} + 4\frac{y_{i-1}}{S_{i-1}}\right)$$

для четного i ($i = 6,8,10,\ldots$);

$$\alpha = 5y_0S_0 + 8y_1S_1 - y_2S_2, \quad y_0 = \varepsilon_{qn}(\varphi_0),$$

$$\alpha_K = y_KS_K + 4y_{K+1}S_{K+1} + y_{K+2}S_{K+2}, \quad S_K = \sin\varphi_K,$$

$$a = 5\frac{y_0}{S_0} + 8\frac{y_1}{S_1} - \frac{y_2}{S_2},$$

$$a_K = \frac{y_K}{S_K} + 4\frac{y_{K+1}}{S_{K+1}} + \frac{y_{K+2}}{S_{K+2}}.$$

Для $i = 3$ и $i = 4$:

$$R_3 = \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_3}\right) + \frac{4}{S_2}\alpha_0 + \frac{1}{S_3}\left(y_1S_1 + 4y_2S_2\right),$$

$$R_4 = \alpha_o\left(\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_4}\right) + \frac{4}{S_3}\left(\frac{\alpha}{4} + \alpha_1\right) + \frac{1}{S_4}\left(y_2 S_2 + 4 y_3 S_3\right),$$

$$y_1 = \frac{t^2}{36}\left(\frac{2\alpha}{S_1} - \frac{\alpha_o}{S_2}\right), \qquad y_2 = \frac{t^2}{9}\left(\frac{\alpha}{S_1} + \frac{\alpha_o}{S_2}\right);$$

$$R_3^* = \frac{a}{4}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_3}\right) + \frac{4}{S_2} a_o + \frac{1}{S_3}\left(\frac{y_1}{S_1} + 4\frac{y_2}{S_2}\right),$$

$$R_4^* = a_o\left(\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_4}\right) + \frac{4}{S_3}\left(\frac{a}{4} + a_1\right) + \frac{1}{S_4}\left(\frac{y_2}{S_2} + 4\frac{y_3}{S_3}\right).$$

$$y_1^* = \frac{n^2 t^2}{36}\left(\frac{2a}{S_1} - \frac{a_o}{S_2}\right), \qquad y_2^* = \frac{n^2 t^2}{9}\left(\frac{a}{S_1} + \frac{a_o}{S_2}\right).$$

Формулы для T_i и T_i^* получаются из формул для R_i и R_i^* заменой в последних букв R_i, R_i^*, α, α_K, a, a_K и y_K соответственно на T_i, T_i^*, β, β_K, b, b_K и z_K с учетом равенств:

$$\beta = 5 z_o S_o + 8 z_1 S_1 - z_2 S_2, \qquad z_o = \varkappa_{qn}(\varphi_o),$$

$$\beta_K = z_K S_K + 4 z_{K+1} S_{K+1} + z_{K+2} S_{K+2},$$

$$b = 5\frac{z_o}{S_o} + 8\frac{z_1}{S_1} - \frac{z_2}{S_2},$$

$$b_K = \frac{z_K}{S_K} + 4\frac{z_{K+1}}{S_{K+1}} + \frac{z_{K+2}}{S_{K+2}},$$

$$z_1^* = \frac{n^2 t^2}{36}\left(\frac{2b}{S_1} - \frac{b_o}{S_2}\right), \qquad z_2^* = \frac{n^2 t^2}{9}\left(\frac{b}{S_1} + \frac{b_o}{S_2}\right).$$

Внося (4) и (5) в (3), получаем систему линейных уравнений для определения y_i и z_i по предшествующим значениям y_o, z_o, y_1, z_1, ..., y_{i-1}, z_{i-1} ($i \geqslant 3$):

$$\delta_{11} y_i + \delta_{12} z_i = P_1, \qquad \delta_{21} y_i + \delta_{22} z_i = Q_i, \tag{10}$$

где

$$P_i = F_i^* - (1+\mu) F_i - (1-\mu) G_i + A_i + U_i - V_i,$$

$$Q_i = G_i^* - (1-\mu) G_i + \nu[(1+\mu) F_i - U_i] + B_i,$$

$$\delta_{11} = 1 + \frac{t^2}{9}\left(1 + \mu - \frac{n^2}{S_i^2}\right), \qquad \delta_{12} = \frac{t^2}{9}(1-\mu),$$

$$\delta_{21} = -\frac{\nu t^2}{9}(1+\mu), \qquad \delta_{22} = 1 + \frac{t^2}{9}\left(1-\mu-\frac{n^2}{S_i^2}\right).$$

Из (IO) находим:

$$y_i = \frac{1}{\Delta}(\delta_{22}P_i - \delta_{12}Q_i), \qquad z_i = \frac{1}{\Delta}(\delta_{11}Q_i - \delta_{21}P_i),$$

$$\Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}.$$

2. Аналогичным образом можно составить систему уравнений для вычисления значений y_1, z_1 и y_2, z_2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь будет:

$$P_1 = -\frac{t^2}{36}\left(\frac{10}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)\left(1+\mu-\frac{n^2}{S_0^2}\right)y_0 S_0 -$$

$$-\frac{t^2}{36}(1-\mu)\left(\frac{10}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)z_0 S_0 + A_1 + U_1 - V_1;$$

$$Q_1 = B_1 + \nu\left[\frac{t^2}{36}(1+\mu)\left(\frac{10}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)y_0 S_0 - U_1\right] -$$

$$-\frac{t^2}{36}\left(\frac{10}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)\left(1-\mu-\frac{n^2}{S_0^2}\right)z_0 S_0;$$

$$P_2 = -\frac{t^2}{9}\left(\frac{5}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)\left(1+\mu-\frac{n^2}{S_0^2}\right)y_0 S_0 -$$

$$-\frac{t^2}{9}(1-\mu)\left(\frac{5}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)z_0 S_0 + A_2 + U_2 - V_2;$$

$$Q_2 = B_2 + \nu\left[\frac{t^2}{9}(1+\mu)\left(\frac{5}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)y_0 S_0 - U_2\right] -$$

$$-\frac{t^2}{9}\left(\frac{5}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)\left(1-\mu-\frac{n^2}{S_0^2}\right)z_0 S_0;$$

$$a_{11} = 1 + \frac{t^2}{9}\left(4-\frac{S_1}{S_2}\right)\left(1+\mu-\frac{n^2}{S_1^2}\right),$$

$$a_{12} = \frac{t^2}{9}(1-\mu)(4-\frac{S_1}{S_2}),$$

$$a_{13} = -\frac{t^2}{36}(1+2\frac{S_2}{S_1})(1+\mu-\frac{n^2}{S_2^2}),$$

$$a_{14} = -\frac{t^2}{36}(1-\mu)(1+2\frac{S_2}{S_1}),$$

$$a_{21} = -\frac{\nu t^2}{9}(1+\mu)(4-\frac{S_1}{S_2}),$$

$$a_{22} = 1+\frac{t^2}{9}(4-\frac{S_1}{S_2})(1-\mu-\frac{n^2}{S_1^2}),$$

$$a_{23} = \frac{\nu t^2}{36}(1+\mu)(1+2\frac{S_2}{S_1}),$$

$$a_{24} = -\frac{t^2}{36}(1+2\frac{S_2}{S_1})(1-\mu-\frac{n^2}{S_2^2}),$$

$$a_{31} = \frac{t^2}{9}(8+4\frac{S_1}{S_2})(1+\mu-\frac{n^2}{S_1^2}),$$

$$a_{32} = \frac{t^2}{9}(1-\mu)(8+4\frac{S_1}{S_2}),$$

$$a_{33} = 1+\frac{t^2}{9}(1-\frac{S_2}{S_1})(1+\mu-\frac{n^2}{S_2^2}),$$

$$a_{34} = \frac{t^2}{9}(1-\mu)(1-\frac{S_2}{S_1}),$$

$$a_{41} = -\frac{\nu t^2}{9}(1+\mu)(8+4\frac{S_1}{S_2}),$$

$$a_{42} = \frac{t^2}{9}(8+4\frac{S_1}{S_2})(1-\mu-\frac{n^2}{S_1^2}),$$

$$a_{43} = -\frac{\nu t^2}{9}(1+\mu)(1-\frac{S_2}{S_1}),$$

$$a_{44} = 1 + \frac{t^2}{9}\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)\left(1 - \mu - \frac{n^2}{S_2^2}\right).$$

3. В качестве примера приведем некоторые результаты расчета сферической оболочки, воспринимающей изгибающую нагрузку (n = I, q = $const$):

$$q_x = q\cos\varphi\cos\psi, \quad q_y = -q\sin\psi, \quad q_z = q\sin\varphi\cos\psi.$$

Отсюда

$$q_{x_1} = q\cos\varphi, \qquad q_{y_1} = -q, \qquad q_{z_1} = q\sin\varphi. \qquad \text{(II)}$$

Нагрузке (II) соответствует следующее точное решение уравнений (I):

$$\varepsilon_{q_1} = \frac{q}{E}\hat{\varepsilon}_{q_1}, \qquad \text{æ}_{q_1} = \frac{q}{E}\hat{\text{æ}}_{q_1},$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{q_1} = m\left(1 - \mu - \frac{2(2+\mu)}{1+\nu}\right)\sin\varphi, \quad \hat{\text{æ}}_{q_1} = \frac{2m\nu(2+\mu)}{1+\nu}\sin\varphi. \quad \text{(I2)}$$

В таблице I приведены некоторые значения $\hat{\varepsilon}_{q_1}$ и $\hat{\text{æ}}_{q_1}$ для сферической оболочки с параметрами λ = 300, μ = 0,3 и m = 90,784, ν = 9890I,2 , вычисленные по (I2). Здесь же представлено и приближенное решение, найденное по рассматриваемому выше способу при $\varphi_0 = 30^\circ$ и шаге интегрирования $t = 0{,}5^\circ$.

Таблица I

φ	Точное решение		Приближенное решение	
	$\hat{\varepsilon}_{q_1}$	$\hat{\text{æ}}_{q_1}$	$\hat{\varepsilon}_{q_1}$	$\hat{\text{æ}}_{q_1}$
30°	3I,7724	208,80I	3I,7724	208,80I
31°	32,7279	2I5,08I	32,7279	2I5,08I
32°	33,6736	22I,296	33,6736	22I,303
33°	34,6089	227,443	34,6089	227,450
34°	35,5337	233,52I	35,5337	233,529
35°	36,4477	239,527	36,4477	239,540
36°	37,3506	245,46I	37,3506	245,47I

Литература

I. Ахмедьянов И.С. О расчете сферической оболочки при симметричном нагружении. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1980, № 4, с. 7-12.

2. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. СМБ. - М.: Наука, 1965.- 384 с.

УДК 539.3

Б.А.Горлач, Е.А.Ефимов

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА В ПРОЦЕССЕ ЕГО ОСАДКИ

Для построения математической модели процесса формообразования деталей в качестве базового рассматривается вариационное уравнение Гамильтона-Остроградского, которое для конечного равновесного состояния тела записано в виде /I/:

$$\int\limits_{V_\tau}[\mathbf{T}:\nabla\delta\mathbf{U}+\mathcal{R}(\dot{\mathbf{V}}-\mathbf{K})\cdot\delta\mathbf{U}]\,dV_\tau=\int\limits_{\Omega_\tau}\mathbf{T}_N\cdot\delta\mathbf{U}\,d\Omega_\tau\,. \tag{I}$$

Здесь $\mathbf{T}$ - тензор напряжения Коши; $\mathbf{T}_N$ - вектор напряжения на поверхности Ω тела с единичной нормалью $\mathbf{N}$; $\dot{\mathbf{V}}$, $\mathbf{K}$ - векторы ускорения и массовой силы; $\delta\mathbf{U}$ - вариация вектора перемещения $\mathbf{U}$; ∇ - векторный оператор Гамильтона; V_τ - Ω_τ - объем и поверхность тела в четырехмерном пространстве (включая время τ); $\mathcal{R}$ - плотность тела. Точками, стоящими между буквами, обозначено скалярное произведение тензорных функций; над буквами - скорость. Прописные буквы относятся к функциям, описывающим конечное состояние тела.

Для решения задач вариационное уравнение (I) преобразуется к метрике некоторого, в общем случае неравновесного, промежуточного состояния. Преобразование производится в предположении, что функции, характеризующие конечное состояние, выражаются через сумму соответствующих функций промежуточного состояния (ниже эти функции записываются строчными буквами, соответствующими вышеприведенным обозначениям) и их приращений, сопровождаемых знаком Δ . Кроме того, при преобразовании используется условие сохранения массы