

ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНГУЛЯРНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ
 ДЛЯ РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ
 НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

В работе /1/ описана методика расчета оболочек вращения при неосесимметричном нагружении, заключающаяся в разложении всех компонентов напряженно-деформированного состояния в тригонометрический ряд по окружной координате с последующим применением метода конечных элементов к каждому из членов ряда. Там же описан простейший изопараметрический конечный элемент оболочки вращения в форме усеченного конуса с двумя узловыми окружностями, имеющий восемь степеней свободы и соответствующий произвольному члену тригонометрического ряда.

В настоящей работе предлагается аналогичный конечный элемент оболочки вращения с десятью и двенадцатью степенями свободы в местной и общей системах координат соответственно.

Рассмотрим конечный элемент оболочки вращения с двумя узловыми окружностями, имеющий вид усеченного конуса (рис. I). Через x_i , r_i , φ_i обозначим координаты узловых окружностей.

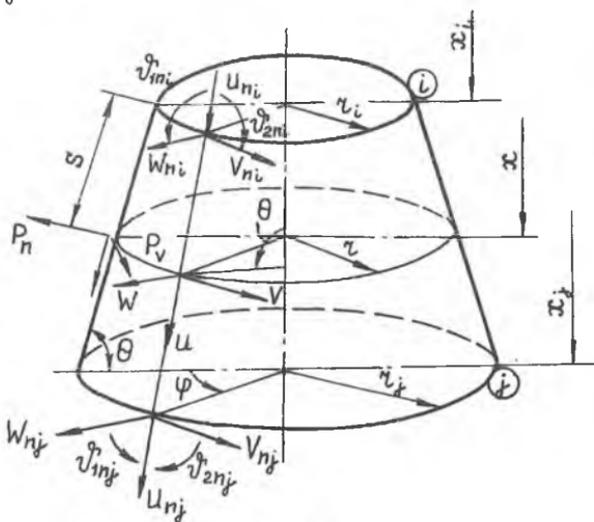


Рис. I

Координаты произвольной точки на образующей оболочки $\varphi = \text{const}$ могут быть выражены через значения координат узловых окружностей с помощью линейных соотношений

$$x = \sum_{k=i,j} \varphi_k x_k, \quad r = \sum_{k=i,j} \varphi_k r_k, \quad (1)$$

где $\varphi_k = \frac{1}{2} (1 + \xi_k \xi)$ - функция формы /2,3/.

Здесь ξ - безразмерная координата, изменяющаяся от -1 до 1 и связанная с расстоянием S равенством $\xi = \frac{2S}{\ell} - 1$, где ℓ - длина образующей элемента.

В предлагаемом элементе перемещения точек срединной поверхности U , W , V и угол поворота нормали относительно параллели и меридиана ψ_1 и ψ_2 запишем в виде

$$\begin{aligned} U &= U_n \cos n\varphi & \psi_1 &= \psi_{1n} \cos n\varphi \\ W &= W_n \cos n\varphi & \psi_2 &= \psi_{2n} \sin n\varphi \\ V &= V_n \sin n\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь φ - угол долготы, отсчитываемый от нулевого меридиана. Следуя работам /1,4/, амплитудные значения перемещений и углов поворота можно аппроксимировать в пределах элемента так же, как и координаты - линейными зависимостями:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=i,j} \varphi_k U_{nk} & \psi_{1n} &= \sum_{k=i,j} \varphi_k \psi_{1nk} \\ W_n &= \sum_{k=i,j} \varphi_k W_{nk} & \psi_{2n} &= \sum_{k=i,j} \varphi_k \psi_{2nk}, \\ V_n &= \sum_{k=i,j} \varphi_k V_{nk} \end{aligned} \quad (3)$$

где U_{nk} , W_{nk} , V_{nk} , ψ_{1nk} , ψ_{2nk} - амплитудные значения узловых перемещений. В отличие от работы /1/ в предполагаемом элементе вводятся дополнительные независимые степени свободы ψ_2 .

Деформации слоя рассматриваемой оболочки на расстоянии Z от срединной поверхности связаны с деформациями срединной поверхности согласно /5/ соотношениями

$$\varepsilon_1^Z = \varepsilon_1 + Z \chi_1, \quad \varepsilon_2^Z = \varepsilon_2 + Z \chi_2, \quad \varepsilon_{12}^Z = \varepsilon_{12} + Z \chi_{12}, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial S}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (u \cos \theta + W \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \cos \theta; & \chi_2 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \\ \chi_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} \psi_1; & \chi_{12} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} \psi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Помимо ε_1^z , ε_2^z и ε_{12}^z в оболочке возникают деформации конечного сдвига, которые будем обозначать ε_{13} и ε_{23} . Их можно записать:

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial W}{\partial s} + \psi_1; \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{r} v + \psi_2 \quad (6)$$

Выразим матрицу деформаций оболочки $[\varepsilon] = [\varepsilon_1^z \ \varepsilon_2^z \ \varepsilon_{12}^z \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{23}]^T$ через амплитудные значения перемещений узловых окружностей, для чего подставим (2) в (5) и (6). Тогда

$$[\varepsilon] = \sum_{k=i,j} [\beta_k] [\bar{V}_k], \quad (7)$$

где

$$[\bar{V}_k] = [u_{nk} \ W_{nk} \ \psi_{1nk} \ v_{nk} \ \psi_{2nk}]^T, \quad (8)$$

а типовая матрица $[\beta_k]$ равна

$$[\beta_k] = [\Gamma] [B_k].$$

Здесь

$$[B_k] = \begin{bmatrix} B_{\varepsilon k}^* \\ \tilde{B}_{\varepsilon k} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} B_{\chi k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_{\varepsilon k}^*] = \begin{bmatrix} \frac{2}{l} \psi_k' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \theta}{r} \psi_k & \frac{\sin \theta}{r} \psi_k & 0 & \frac{n}{r} \psi_k & 0 \\ -\frac{n}{r} \psi_k & 0 & 0 & \frac{2}{l} \psi_k' - \frac{\cos \theta}{r} \psi_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{B}_{\varepsilon k}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{l} \psi_k' & \psi_k & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{r} \psi_k & 0 & -\frac{\sin \theta}{r} \psi_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

$$[B_{\alpha k}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{\ell} \varphi'_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{\ell} \varphi_k & 0 & \frac{n}{\ell} \varphi_k \\ 0 & 0 & -\frac{n}{\ell} \varphi_k & 0 & \frac{2}{\ell} \varphi'_k - \frac{\cos \theta}{\ell} \varphi_k \end{bmatrix}$$

Черта сверху в обозначениях $[\bar{V}_k]$ указывает на то, что узловые перемещения взяты в местной системе координат.

Для вычисления четырех блоков $[\bar{K}_{st}]$ ($s, t = i, j$) матрицы жесткости конечного элемента оболочки в местной системе координат воспользуемся формулой

$$[\bar{K}_{st}] = \int_{\tau^e} [\beta_s]^T [\alpha] [\beta_t] d\tau, \quad (9)$$

где матрица $[\alpha]$, устанавливающая связь между напряжениями и деформациями для ортотропной оболочки, имеет вид:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} [\alpha^*] & 0 \\ 0 & [G] \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{13} & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{23} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & \frac{E_1 \mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2 \mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Здесь для учета неравномерности напряжений σ_{13} и σ_{23} по толщине оболочки принято $\tilde{G}_{13} = \frac{5}{6} G$ $\tilde{G}_{23} = \frac{5}{6} G$.

После интегрирования по координатам z и φ выражение (9) принимает вид:

$$[\bar{K}_{st}] = [K_{st}^*] + [\tilde{K}_{st}]$$

$$[K_{st}^*] = \frac{\pi \ell h}{2} \int_{-1}^1 ([\tilde{B}_{\epsilon s}]^T [\alpha^*] [\tilde{B}_{\epsilon t}] + \frac{h^2}{12} [B_{\alpha s}]^T [\alpha^*] [B_{\alpha t}]) r d\xi \quad (II)$$

$$[\tilde{K}_{st}] = \frac{\pi \ell h}{2} \int_{-1}^1 [\tilde{B}_{\epsilon s}]^T [G] [\tilde{B}_{\epsilon t}] r d\xi.$$

При вычислении подматриц $[K_{st}^*]$ и $[\tilde{K}_{st}]$ для исключения ложной деформации поперечного сдвига используется одноточечное интегрирование по Гауссу.

Подкрепляющие оболочку шпангоуты будем рассматривать как тонкое круговое кольцо. Поперечное сечение кольца считается недеформируемым, пренебрегается также эффектом надавливания волокон друг на друга. Окружность радиуса r_* , проходящую через центр тяжести поперечного сечения шпангоута, будем считать узловой, а сам шпангоут будем рассматривать как конечный элемент, амплитудные значения перемещений которого (рис.2) образуют матрицу

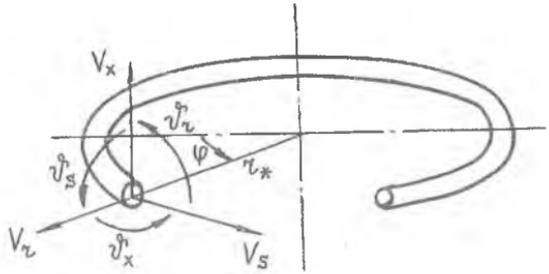


Рис. 2

$$[V_K] = [V_{xKn} \quad V_{zKn} \quad v_{sKn}^0 \quad V_{sKn} \quad v_{tKn}^0 \quad v_{rKn}^0]^T. \quad (I2)$$

Перемещения произвольной точки поперечного сечения шпангоута записываются следующим образом (рис.3):

$$u_y = V_z - z v_s^0; \quad u_x = V_x - y v_s^0; \quad u_s = V_s - z v_t^0 + y v_x^0. \quad (I3)$$

Окружная деформация произвольного волокна шпангоута может быть записана так:

$$\epsilon_{ss} = \epsilon + y \chi_1^* + z \chi_2^*, \quad (I4)$$

где

$$\epsilon = \frac{1}{r_*} \left(\frac{dV_s}{d\varphi} + V_z \right); \quad \chi_1^* = \frac{1}{r_*} \frac{\partial v_x^0}{\partial \varphi}; \quad \chi_2^* = \frac{1}{r_*} (v_s^0 - \frac{\partial v_z^0}{\partial \varphi}). \quad (I5)$$

В этом случае матрица жесткости шпангоута принимает вид:

$$[K_*] = \frac{\pi E_*}{r_*} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & nF & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_y & 0 & nJ_{yz} & -nJ_y \\ 0 & nF & 0 & n^2F & 0 & -n^2J_y \\ 0 & 0 & nJ_{yz} & 0 & n^2J_z & -n^2J_{yz} \\ 0 & 0 & -nJ_y & -n^2J_y & -n^2J_{yz} & n^2J_y \end{bmatrix} \quad (I6)$$

Здесь E_* - модуль упругости материала шпангоута; J_y, J_z - соответственно осевые и полярный моменты инерции попереч-

ного сечения шпангоута относительно центральных осей (рис.3).

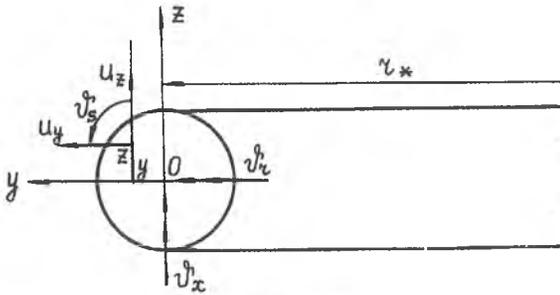


Рис. 3

Для составления общей матрицы жесткости конструкций перейдем к общей системе координат. Связь между узловыми перемещениями в местной и общей системах координат осуществляется с помощью матрицы преобразования $[\lambda_k]$:

$$[\bar{V}_k] = [\lambda_k][V_k], \quad (17)$$

где $[V_k]$ определяется по формуле (12):

$$[\lambda_k] = \begin{bmatrix} -\sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (18)$$

В том месте, где элементы оболочки соединяются со шпангоутом, вводится один общий узел, совпадающий с центром тяжести сечения шпангоута.

Типовой блок матрицы жесткости конечного элемента оболочки при переходе к общей системе координат преобразуется /2,3/ по формуле

$$[K_{st}^e] = [\lambda_s]^T [\bar{K}_{st}] [\lambda_t]. \quad (19)$$

При этом в силу структуры матрицы $[\lambda_k]$ матрица $[K_{st}^e]$ в ряде случаев получается сингулярной, т.е. на главной диагонали появляется ноль.

Методика расчета реализована в виде специализированной программы на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Для оценки эффективности

Предложенных конечных элементов рассмотрен ряд задач, имеющих аналитическое решение.

Возьмем кольцевую пластину, жестко заземленную по наружному контуру и нагруженную по внутреннему контуру поперечной погонной нагрузкой по закону $q_x \cos \varphi$ (рис.4). При вычислениях приняты следующие значения параметров: $R_1/R_0 = 2$, $R_0 = 150$ мм, $h = 2$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

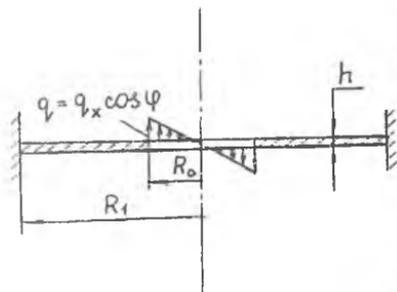


Рис. 4

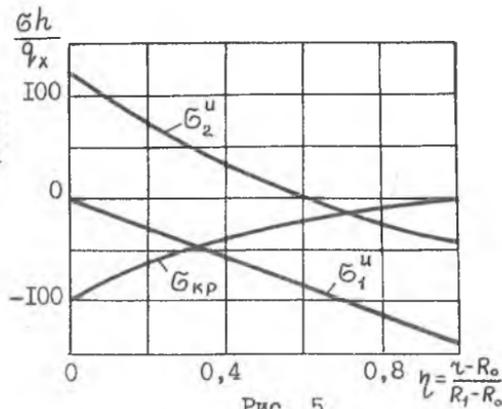


Рис. 5

Для исследования сходимости задача решалась с аппроксимацией пластинки в виде набора 5, 10, 20 и 40 конечных элементов. Результаты расчетов сравнивались с аналитическим решением по технической теории изгиба пластин, представленным на рис.5. Характер сходимости расчета к аналитическому по мере увеличения количества конечных элементов в зонах наибольших значений напряжений и прогиба приведен в таблице.

Таблица

Количество конечных элементов	Погрешность в определении		
	W	σ_1^u	σ_2^u
5	1,98 %	1,76 %	1,32 %
10	1,1 %	0,63 %	0,562 %
20	0,6 %	0,38 %	0,37 %
40	0,2 %	0,32 %	0,268 %

Приведенные результаты подтверждают достаточно высокую эффективность предложенного конечного элемента и разработанной программы расчета для ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Леонов В.И., Канова Г.В., Беляева В.И. К расчету напряженно-деформированного состояния подкрепленных оболочек вращения при неосесимметричном нагружении. - В кн.: Прочность и долговечность элементов конструкций летательных аппаратов. Межвуз. сб. - Куйбышев: КуАИ, 1984, с. 7-18.

2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского. - М.: Мир, 1975. - 542 с.

3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392 с.

4. Zienkiewicz O.C., Bauer J., Morgan K., Onate E. A Simple and efficient element for axisymmetric shells. - *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engine*, 1977, v. 11, s. 1545 - 1558.

5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. - М.: Машиностроение, 1977. - 488 с.

УДК 629.7.02:534.1

Н.А.Калугин, Л.М.Савельев

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧЕ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Пусть контактирующие тела α и β (рис.1) находятся в равновесии под действием узловых сил $P_{(i)}^{\alpha}$ и $P_{(i)}^{\beta}$.

Здесь и далее величина с индексом $\alpha(\beta)$ принадлежит телу $\alpha(\beta)$. Нижний индекс i в скобках означает то, что данная величина отвечает i -му уровню внешней нагрузки. Узловые перемещения $V_{(i)}^{\alpha}$ и $V_{(i)}^{\beta}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия /1/:

$$K^{\ell} V_{(i)}^{\ell} = P_{(i)}^{\ell} \quad (\ell = \alpha, \beta), \quad (I)$$

где K^{ℓ} - матрица жесткости тела ℓ ($\ell = \alpha, \beta$).

Пусть далее внешние нагрузки получили приращение. Новые значе-