ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 539.3

В.Н.Паймушин, А.Ю.Одиноков

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Двухслойные оболочки со слоями переменной толщины являются расчетной схемой многих элементов современной техники. В ряде случаев (например, двухслойные зеркала астростанций) слои этих оболочек имеют достаточно большую относительную толщину. Поэтому их расчет на основе теории оболочек, базирующийся на классических гипотезах Кирхгофа-Лява, может привести к значительным погрешностям. В связи с этим в данной статье строится линейная теория двухслойных оболочек со слоями переменной толщины, учитывающая поперечные сдвиги и различия в метриках слоев. Толщины слоев оболочки предполагаются средними, а их изменение достаточно плавным, удовлетворяющим условиям работы [1].

Отметим, что различные вопросы расчета двухслойных оболочек со слоями постоянной толщины изучались во многих работах, например [2 - 5].

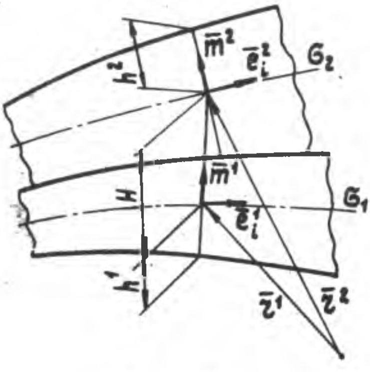

Рис. I

I. Предположим, что срединная поверхность одного из слоев оболочки G^1 отнесена к ее линиям кривизны $\alpha_i = const\ (i=1,2)$. Для параметризации срединной поверхности G^2 второго слоя отобразим ее на G^1 с помощью векторного уравнения [6] (рис. I):

$$\vec{r}^{\,2}(\alpha_1,\alpha_2)=\vec{r}^{\,1}(\alpha_1,\alpha_2)+H(\alpha_1,\alpha_2)\,\vec{m}\,(\alpha_1,\alpha_2). \qquad (\mathrm{I})$$

При этом в случае, когда $\mathfrak{S}^2$ является пологой относительно $\mathfrak{S}^1$ [6], с точностью $1+y_i\,y_j \approx 1$ имеют место зависимости:

$$\vec{e}_i^{\,2}=\vec{e}_i^{\,1}+y_i\vec{m}^{\,1}\quad (i=1,2);\qquad \vec{m}^{\,2}=\vec{m}^{\,1}-y_1\vec{e}_1^{\,1}-y_2\vec{e}_2^{\,1}\,, \qquad (2)$$

$$A_2^k\vec{e}^{\,k}_{1,1}=-A^k_{1,2}\vec{e}^{\,k}_2-A^k_1A^k_2K^k_{11}\vec{m}^{\,k}\qquad (1\rightleftharpoons 2)\ (k=1,2)$$

$$A_1^k\vec{e}^{\,k}_{1,2}=A^k_{2,1}\vec{e}^{\,k}_2-A^k_1A^k_2K^k_{12}\vec{m}^{\,k}\qquad (1\rightleftharpoons 2)\ (k=1,2)$$

$$\vec{m}^{\,k}_{,i}=A^k_i(K^k_{i1}\vec{e}^{\,k}_1+K^k_{i2}\vec{e}^{\,k}_2)\qquad (i=1,2) \qquad (3)$$

$$K^2_{11}=\frac{K^1_{11}}{\theta_1}-\frac{1}{A^2_1}\left(\frac{y_2}{A^1_2}\frac{\partial A^1_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}\right),\quad K^2_{12}=\frac{1}{A^1_2}\left(\frac{y_1}{A^1_2}\frac{\partial A^1_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial y_2}{\partial\alpha_1}\right),\ (1\rightleftharpoons 2), \qquad (4)$$

где K^k_{ij} $(i,j=1,2)$ – кривизны и кручения координатных линий на $\mathfrak{S}^k$, причем $K^1_{12}=K^1_{21}=0$; $A^1_i,\ A^2_i=\theta_iA^1_i$ – параметры Ляме на $\mathfrak{S}^k$; $\theta_i=1+K^1_{ii}H$ – коэффициенты, учитывающие изменение метрики в направлении единичной нормали $\vec{m}^{\,1}$; $y_i=(A^1_i\theta_i)^{-1}H_{,i}$ – коэффициенты, через которые выражаются углы между единичными векторами $\vec{e}^{\,1}_i$ и $\vec{e}^{\,2}_i$, а также между $\vec{e}^{\,2}_1$ и $\vec{e}^{\,2}_2$.

Принимая для слоев оболочки гипотезу прямой линии, вектор перемещений в слоях представим в виде разложений:

$$\vec{U}^k=\sum_{i=1}^{2}(u^k_i+z^k\psi^k_i)\vec{e}^{\,k}_i+w^k\vec{m}^{\,k},\ \text{где}\ \ -h^k\le z^k\le h^k,\ (k=1,2), \qquad (5)$$

которые должны удовлетворять при $z^k=\delta^kh^k$ $(\delta^1=-\delta^2=1)$ условию сопряжения слоев по перемещениям*:

$$\vec{U}^1(z^1=h^1)=\vec{U}^2(z^2=-h^2). \qquad (6)$$

Внося сюда зависимости (2), выразим компоненты вектора перемещений точек $\mathfrak{S}^2$ через функции u^1_i , w^1 , ψ^k_i $(i,k=1,2)$, принимаемые в дальнейшем в качестве искомых

$$u^2_i=u^1_i+\sum_{k=1}^{2}h^k\psi^k+y_iw^1,\quad w^2=w^1-\sum_{s=1}^{2}y_s(u^1_s+h^1\psi^1_s),\ (i=1,2). \qquad (7)$$

---

*Отметим, что условие (6) для двухслойной оболочки со слоями переменной толщины, как видно из рис. I, является приближенным.

Радиус-векторы произвольных точек в слоях оболочки до и после деформации будут равны $\vec{\bar{\rho}}^{k} = \vec{\rho}^{k} + \vec{U}^{k} = \vec{r}^{k} + z^{k}\vec{m}^{k} + \vec{U}^{k}$. Дифференцированием этих выражений по α_i, z^k могут быть найдены базисные векторы $\vec{\rho}_i^{k} = \partial\vec{\rho}^{k}/\partial\alpha_i$, $\vec{\rho}_3^{k} = \partial\vec{\rho}^{k}/\partial z^{k} = \vec{m}^{k}$, $\vec{\bar{\rho}}_i^{k} = \partial\vec{\bar{\rho}}^{k}/\partial\alpha_i$, $\vec{\bar{\rho}}^{k} = \partial\vec{\bar{\rho}}^{k}/\partial z^{k}$; метрические тензоры до $(G_{ij}^{k} = \vec{\rho}_i^{k}\vec{\rho}_j^{k})$ и после $(\bar{G}_{ij}^{k} = \vec{\bar{\rho}}_i^{k}\vec{\bar{\rho}}_j^{k})$ деформации, а следовательно и компоненты тензоров деформаций слоев. Физические компоненты последних при пренебрежении нелинейными членами, а также членами с множителем $(z^k)^2$ при малых деформациях оказываются равными:

$$\varepsilon_{ii}^{k^z} = \frac{\varepsilon_{ii}^{k} + z^{k}\varkappa_{ii}^{k}}{1 + K_{ii}^{k} z^{k}}, \qquad \gamma_{i3}^{k} = \frac{\gamma_{i3}^{k} + z^{k}\Gamma_{i3}^{k}}{1 + K_{ii}^{k} z^{k}}, \quad (i, k = 1, 2),$$

$$\gamma_{12}^{k^z} = 2\varepsilon_{12}^{k} = \frac{\varepsilon_{12}^{k} + z^{k}\varkappa_{12}^{k}}{(1 + K_{11}^{k} z^{k})(1 + K_{22}^{k} z^{k})}, \tag{8}$$

где

$$2\varepsilon_{ij}^{k} = e_{ij}^{k} + e_{ji}^{k}, \quad 2\varkappa_{ij} = E_{ij}^{k} + E_{ji}^{k} + \sum_{s=1}^{2}(K_{js}^{k} e_{is}^{k} + K_{is}^{k} e_{js}^{k}),$$

$$\gamma_{i3}^{k} = \psi_i^{k} + e_{i3}^{k}, \quad \Gamma_{i3}^{k} = E_{i3}^{k} + \sum_{s=1}^{2} K_{is}^{k}\psi_s^{k}, \quad (i, j, k = 1, 2). \tag{9}$$

Здесь e_{ij}^{k} и E_{ij}^{k} – физические компоненты тензоров поворотов и искривлений слоев:

$$A_1^k A_2^k e_{11}^k = A_2^k u_{1,1}^k + A_{1,2}^k u_2^k + A_1^k A_2^k K_{11}^k w^k, \quad A_1^k A_2^k e_{12}^k = A_2^k u_{2,1}^k -$$

$$- A_{1,2}^k u_1^k + A_1^k A_2^k K_{12}^k w^k, \quad A_1^k e_{13}^k = w_{,1}^k - A_1^k K_{11}^k u_1^k - A_1^k K_{12}^k u_2^k,$$

$$A_1^k A_2^k E_{11}^k = A_2^k \psi_{1,1}^k + A_{1,2}^k \psi_2^k, \quad A_1^k A_2^k E_{12}^k = A_2^k \psi_{2,1}^k - A_{1,2}^k \psi_1^k,$$

$$A_1^k E_{13}^k = -A_1^k K_{11}^k \psi_1^k - A_1^k K_{12}^k \psi_2^k, \quad (1 \rightleftharpoons 2)\ (k = 1, 2). \tag{10}$$

2. Используя принцип возможных перемещений, выведем уравнения равновесия оболочки. В соответствии с принятыми допущениями вариация потенциальной энергии деформации оболочки будет равна

$$\delta W = \sum_{k=1}^{2}\delta W^{k} = \sum_{k=1}^{2}\iint_{G^k}\int_{-h^k}^{h^k}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}^{k}\delta\varepsilon_{ij}^{k^z} + \sum_{i=1}^{2}\sigma_{i3}^{k}\delta\gamma_{i3}^{k^z}\Big)d\Omega^{k}, \tag{11}$$

где σ_{ij}^{K} – физические компоненты тензоров напряжений в слоях, причем положено $\sigma_{33}^{K}=0$; $d\Omega^{K}$ – элемент объема K –го слоя: $d\Omega^{1}=(1+K_{11}^{1}z^{1})(1+K_{22}^{1}z^{1})A_1^1A_2^1\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,dz^{1}$; и с точностью $1+y_iy_j\approx 1$ $d\Omega^{2}=(1+K_{11}^{2}z^{2})(1+K_{22}^{2}z^{2})A_1^2A_2^2\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,dz^{2}$.

Рассмотрим оболочку, у которой контурные линии на срединных поверхностях слоев совпадают с линиями, соответствующими $\alpha_i=const\in\sigma^{1}$, а граничные срезы образованы движением нормалей $\vec{m}^{K}$ к σ^{K} вдоль соответствующих координатных линий.

В этом случае, внося в (II) выражения (8) и введя обозначения для усилий и моментов в слоях

$$T_{11}^{K}=\int_{-h^K}^{h^K}\sigma_{11}^{K}(1+K_{22}^{K}z^{K})dz^{K},\qquad T_{13}^{K}=\int_{-h^K}^{h^K}\sigma_{13}^{K}(1+K_{22}^{K}z^{K})dz^{K},$$

$$M_{11}^{K}=\int_{-h^K}^{h^K}\sigma_{11}^{K}(1+K_{22}^{K}z^{K})z^{K}dz^{K},\quad M_{13}^{K}=\int_{-h^K}^{h^K}\sigma_{13}^{K}(1+K_{22}^{K}z^{K})z^{K}dz^{K},\qquad (I2)$$

$$T_{12}^{K}=\int_{-h^K}^{h^K}\sigma_{12}^{K}dz^{K},\quad M_{12}^{K}=\int_{-h^K}^{h^K}\sigma_{12}^{K}z^{K}dz^{K},\quad (1\rightleftharpoons 2)\ (K=1,2)$$

$$N_{ij}^{K}=T_{ij}^{K}+\sum_{s=1}^{2}K_{si}^{K}M_{js}^{K},\qquad (i,j,K=1,2),\qquad (I3)$$

после некоторых преобразований получим

$$\delta W=\sum_{K=1}^{2}\Big\{\Big[\int_0^{\ell_2}\Big[\sum_{s=1}^{2}(N_{1s}^{K}\delta u_s^{K}+M_{1s}^{K}\delta\psi_s^{K})+N_{13}^{K}\delta w^{K}\Big]A_2^{K}d\alpha_2\Big]_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=\ell_1}+$$

$$+\Big[\int_0^{\ell_1}\Big[\sum_{s=1}^{2}(N_{2s}^{K}\delta u_s^{K}+M_{2s}^{K}\delta\psi_s^{K})+N_{23}^{K}\delta w^{K}\Big]A_1^{K}d\alpha_1\Big]_{\alpha_2=0}^{\alpha_2=\ell_2}-$$

$$-\iint_{\sigma^K}\Big[\sum_{s=1}^{2}(L_s^{K}\delta u_s^{K}+G_s^{K}\delta\psi_s^{K})+L_3^{K}\delta w^{K}\Big]d\alpha_1\,d\alpha_2\Big\},\qquad (I4)$$

где L_s^{K} и G_s^{K} – дифференциальные операторы

$$L_1^{K}=(A_2^{K}N_{11}^{K})_{,1}+(A_1^{K}N_{21}^{K})_{,2}+A_{1,2}^{K}N_{12}^{K}-A_{2,1}^{K}N_{22}^{K}+A_1^{K}A_2^{K}(K_{11}^{K}N_{13}^{K}+K_{12}^{K}N_{23}^{K}),$$

$$G_1^{K}=(A_2^{K}M_{11}^{K})_{,1}+(A_1^{K}M_{21}^{K})_{,2}+A_{1,2}^{K}M_{12}^{K}-A_{2,1}^{K}M_{22}^{K}+A_1^{K}A_2^{K}(K_{11}^{K}M_{13}^{K}+K_{12}^{K}M_{23}^{K}-N_{13}^{K}),$$

$$L_3^{K}=(A_2^{K}N_{13}^{K})_{,1}+(A_1^{K}N_{23}^{K})_{,2}-A_1^{K}A_2^{K}(K_{11}^{K}N_{11}^{K}+K_{12}^{K}N_{12}^{K}+K_{21}^{K}N_{21}^{K}+K_{22}^{K}N_{22}^{K}),$$

$$(1\rightleftharpoons 2)$$

Предположим, что оболочка нагружена контурными усилиями и моментами

$$\tilde{\vec{T}}_i^{K}=\sum_{s=1}^{2}\tilde{T}_{is}^{K}\vec{e}_s^{K}+\tilde{T}_{i3}^{K}\vec{m}^{K},\quad \tilde{\vec{M}}_i^{K}=\sum_{s=1}^{2}\tilde{M}_{is}^{K}\vec{e}_s^{K}\qquad (i,K=1,2)\qquad (I5)$$

приведенными к срединным поверхностям $\mathfrak{S}^{\kappa}$, поверхностными усилиями, приложенными к лицевым поверхностям $z^1 = -h^1$ и $z^2 = h^2$ и заданными в виде разложений

$$\vec{P}^{\kappa} = \sum_{s=1}^{2} P_s^{\kappa} \vec{e}_s^{\,\kappa} + P_3^{\kappa} \vec{m}^{\kappa}, \tag{I6}$$

а также объемными силами

$$\vec{F}^{\kappa} = \sum_{s=1}^{2} F_s^{\kappa} \vec{e}_s^{\,\kappa} + F_3^{\kappa} \vec{m}^{\kappa}. \tag{I7}$$

Вариация работы этих усилий на возможных перемещениях после ряда преобразований запишется в виде

$$\delta A = \Big\{ \int_0^{\ell_2} \Big[\sum_{s=1}^{2} (\tilde{N}_{1s} \delta u_s^1 + \tilde{M}_{1s} \delta \psi_s^1 + \tilde{H}_{1s} \delta \psi_s^2) + \tilde{N}_{13} \delta w^1 \Big] A_2^1 d\alpha_2 \Big\}_{\alpha_1 = 0}^{\alpha_1 = \ell_1} +$$
$$+ \Big\{ \int_0^{\ell_1} \Big[\sum_{s=1}^{2} (\tilde{N}_{2s} \delta u_s^1 + \tilde{M}_{2s} \delta \psi_s^1 + \tilde{H}_{2s} \delta \psi_s^2) + \tilde{N}_{13} \delta w^1 \Big] A_1^1 d\alpha_1 \Big\}_{\alpha_2 = 0}^{\alpha_2 = \ell_2} +$$
$$+ \iint_{\mathfrak{S}^1} \Big\{ \sum_{s=1}^{2} \big[(\tilde{f}_s + \tilde{P}_s) \delta u_s^1 + (\tilde{F}_s + \tilde{\mathcal{P}}_s) \delta \psi_s^1 + (\tilde{\Phi}_s + \tilde{\pi}_s) \delta \psi_s^2 \big] +$$
$$+ (\tilde{f}_3 + \tilde{P}_3) \delta w^1 \Big\} d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{I8}$$

где введены обозначения:

$$\tilde{N}_{ij} = \tilde{T}_{ij}^1 + \theta_i (\tilde{T}_{ij}^2 - y_j \tilde{T}_{i3}^2), \quad \tilde{M}_{ij} = \tilde{M}_{ij}^1 + \theta_i h^1 (\tilde{T}_{ij}^2 - y_j \tilde{T}_{i3}^2) \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\tilde{N}_{i3} = \tilde{T}_{i3}^1 + \theta_i (\tilde{T}_{i3}^2 + y_1 \tilde{T}_{i1}^2 + y_2 \tilde{T}_{i2}^2), \quad \tilde{H}_{ij} = \theta_i (\tilde{M}_{ij}^2 + h^2 \tilde{T}_{ij}^2),$$

$$\tilde{f}_i = \int_{-h^1}^{h^1} F_i^1 d\zeta^1 + \int_{-h^2}^{h^2} (F_i^2 - y_i F_3^2) d\zeta^2 \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{f}_3 = \int_{-h^1}^{h^1} F_3^1 d\zeta^1 + \int_{-h^2}^{h^2} (F_3^2 + y_1 F_1^2 + y_2 F_2^2) d\zeta^2,$$

$$\tilde{F}_i = \int_{-h^1}^{h^1} F_i^1 z^1 d\zeta^1 + h^1 \int_{-h^2}^{h^2} (F_i^2 - y_i F_3^2) d\zeta^2 \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{\Phi}_i = \int_{-h^2}^{h^2} F_i^2 (z^2 + h^2) d\zeta^2 \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{P}_i = P_i^1\theta_1^1\theta_2^1 + (P_i^2 - y_i P_3^2)\theta_1^2\theta_2^2\theta_1\theta_2 \qquad (i=1,2)$$

$$\tilde{P}_3 = P_3^1\theta_1^1\theta_2^1 + (P_3^2 + y_1 P_1^2 + y_2 P_2^2)\theta_1^2\theta_2^2\theta_1\theta_2$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_i = h^1[-P_i^1\theta_1^1\theta_2^1 + (P_i^2 - y_i P_3^2)\theta_1^2\theta_2^2\theta_1\theta_2 \qquad (i=1,2)$$

$$\tilde{\Pi}_i = 2h^2 P_i^2\theta_1^2\theta_2^2\theta_1\theta_2 \qquad (i=1,2). \tag{I9}$$

Здесь $d\zeta^1 = (1+k_{11}^1 z^1)(1+k_{22}^1 z^1)A_1^1 A_2^1\, dz^1$; $d\zeta^2 = \theta_1\theta_2(1+k_{11}^2 z^2)\times(1+k_{22}^2 z^2)A_1^1 A_2^2\, dz^2$; $\theta_i^k = 1-\delta^k k_{ii}^k h^k$ – коэффициенты, учитывающие различие в метриках поверхности σ^1 и лицевых поверхностей оболочки.

Внесем в выражение (I4) соотношения (7) и введем обозначения для суммарных усилий и моментов:

$$N_{ij} = N_{ij}^1 + \theta_i(N_{ij}^2 - y_j N_{i3}^2), \quad M_{ij} = M_{ij}^1 + \theta_i h^1(N_{ij}^2 - y_j N_{i3}^2),$$

$$N_{i3} = N_{i3}^1 + \theta_i(N_{i3}^2 + y_1 N_{i1}^2 + y_2 N_{i2}^2), \; H_{ij} = \theta_i(M_{ij} + h^2 N_{ij}); \; (i,j=1,2). \tag{20}$$

Подставляя теперь выражения (I4) и (I8) в вариационное уравнение $\delta W = \delta A$, с учетом (20) будем иметь

$$\left\{\int_0^{l_2}\left\{\sum_{s=1}^{2}[(N_{1s}-\tilde N_{1s})\delta u_s^1 + (M_{1s}-\tilde M_{1s})\delta\psi_s^1 + (H_{1s}-\tilde H_{2s})\delta\psi_s^2] + (N_{13}-\tilde N_{13})\delta w^1\right\}A_2^1\, d\alpha_2\right\}_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=l_1} +$$

$$+\left\{\int_0^{l_1}\left\{\sum_{s=1}^{2}[(N_{2s}-\tilde N_{2s})\delta u_s^1 + (M_{1s}-\tilde M_{1s})\delta\psi_s^1 + (H_{2s}-\tilde H_{2s})\delta\psi_s^2] + (N_{23}-\tilde N_{23})\delta w^1\right\}A_1^1\, d\alpha_1\right\}_{\alpha_2=0}^{\alpha_2=l_2} -$$

$$-\iint_{\sigma^1}\Big\{\sum_{s=1}^{2}\{[L_s^1 + L_s^2 - y_s L_3^2 + A_1^1A_2^1(\tilde f_s + \tilde P_s)]\delta u_s^1 + [G_s^1 + h^1(L_s^2 - y_s L_3^2) +$$

$$+ A_1^1A_2^1(\tilde F_s + \tilde{\mathcal{P}}_s)]\delta\psi_s^1 + [G_s^2 + h^2 L_s^2 + A_1^1A_2^1(\tilde{\mathcal{F}}_s + \tilde\Pi_s)]\delta\psi_s^2\} +$$

$$+[L_3^1 + L_3^2 + y_1 L_1^2 + y_2 L_2^2 + A_1^1A_2^1(\tilde f_3 + \tilde P_3)]\delta w^1\Big\}d\alpha_1\, d\alpha_2, \tag{2I}$$

откуда следует система семи дифференциальных уравнений равновесия двухслойной оболочки

$$L_i^1 + L_i^2 - y_i L_3^2 + A_1^1 A_2^1 (\tilde{f}_i + \tilde{p}_i) = 0 \quad (i = 1,2)$$

$$L_3^1 + L_3^2 + y_1 L_1^2 + y_2 L_2^2 + A_1^1 A_2^1 (\tilde{f}_3 + \tilde{p}_3) = 0$$

$$G_i^2 + h^1 (L_i^2 - y_i L_i^2) + A_1^1 A_2^1 (\tilde{F}_i + \tilde{\mathcal{P}}_i) = 0 \quad (i = 1,2)$$

$$G_i^2 + h^2 L_i^2 + A_1^1 A_2^1 (\tilde{\Phi}_i + \tilde{\pi}_i) = 0 \qquad (i = 1,2) \qquad (22)$$

с общим порядком, равным четырнадцати, и статические граничные условия задачи:

$$N_{ij} = \tilde{N}_{ij}, \quad M_{ij} = \tilde{M}_{ij}, \quad H_{ij} = \tilde{H}_{ij}, \quad N_{i3} = \tilde{N}_{i3} \quad (i,j = 1,2). \qquad (23)$$

Отметим, что в случае $h^k = const$ выведенные здесь соотношения являются частным вариантом более общих соотношений теории многослойных оболочек со слоями постоянной толщины Григолюка-Чулкова [7].

Литература

I. Паймушин В.Н., Галимов Н.К. К общей теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины. – В сб.: Труды семинара по теории оболочек, вып. УI, Казанский физ.-техн. институт АН СССР, 1975.

2. Григолюк Э.И. О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек. Инженерный сборник, т. 16, 1953.

3. Григолюк Э.И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инженерный сборник, т. ХУП, 1953.

4. Королев В.И. Тонкие двухслойные пластины и оболочки. Инженерный сборник, т. ХХП, 1954.

5. Клоков А.В., Новичков Ю.Н. Некоторые вопросы динамики двухслойных цилиндрических оболочек. – В сб.: Труды Х Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. П, Тбилиси, 1975.

6. Паймушин В.Н. Нелинейная теория тонких оболочек, пологих относительно поверхности отсчета. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1976.

7. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем. Изв. АН СССР, "Механика", № 5, 1965.