шт. На рис.5 представлено влияние относительной ширины накладки $= \frac{h_1}{h}$ на значения наибольших напряжений в системе для значения раметра $\omega = I$.

Аналогичные результаты приведены на рис.6 – 8 для случая дейст-я на кронштейн изгибающего момента $\mathcal{M}_\xi$. На этих графиках напря-ния отнесены к $\sigma_* = \frac{\mathcal{M}_\xi}{h^2\sqrt{Rh}}$. При действии изгибающего момента $\mathcal{M}_\xi$ вид подкрепления сравнительно слабо влияет на наибольшие напря-ния в системе.

Библиографический список

I. Леонов В.И., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Передача локальных здействий на цилиндрическую оболочку // Механика деформируемого ердого тела: Межвуз.сб./Куйбышев. гос. ун-т. Куйбышев, I976,вып.2. I34–I40.

2. Леонов В.И. К вопросу о расчете цилиндрической оболочки на йствие локальных нагрузок // Вопросы прочности и долговечности ементов авиационных конструкций: Межвуз.сб. / Куйбышев. авиац.ин-т. йбышев, I979, вып. 5. С. 64–7I.

3. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми верстиями // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций: .научн.тр. / Куйбышев.авиацион.ин-т. Куйбышев, I967, вып. 29. 3–I7.

539.3

..Калугин

ОСТРОЕНИЮ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ЕЛИНЕЙНОМ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОМ АНАЛИЗЕ

Рассматривается метод построения матриц жесткости в нелинейном конечноэлементном анализе. Показано, что применение традиционного подхода приводит к необходимости вычислять линейную и нелинейную составляющие матрицы жесткости с помощью раз-

осы прочности и долговечности элементов ационных конструкций. Куйбышев, I990

личных программ. Предлагается модифицированный метод построения линейной составляющей, позволяющий устранить указанный недостаток. Для иллюстрации рекомендуемого подхода приведен конечный элемент для трехмерного пространства.

В нелинейном анализе уравнение равновесия конечного элемента можно записать /I/ в виде

$$({}^{t}K_{L} + {}^{t}K_{NL})V = {}^{t+\Delta t}P - {}^{t}F, \qquad (1)$$

где P, F – матрицы-столбцы внешней узловой нагрузки и упругих сил соответственно; $V = {}^{t+\Delta t}V - {}^{t}V$ – матрица-столбец приращений узловых перемещений за промежуток времени Δt; верхним левым индексом обозначается момент времени, в который определяется величина. Линейная ${}^{t}K_{L}$ и нелинейная ${}^{t}K_{NL}$ матрицы жесткости находятся /I/ из соотношений

$$\delta V^{*}\,{}^{t}K_{L}V = \int_{{}^{\tau}V} \delta\,{}_{\tau}\hat{e} : {}_{\tau}\hat{C} : {}_{\tau}\hat{e}\;{}^{\tau}dV, \qquad (2)$$

$$\delta V^{*}\,{}^{t}K_{NL}V = \int_{{}^{t}V} \delta\,{}_{\tau}\hat{\eta} : {}^{t}_{\tau}\hat{S}\;{}^{\tau}dV. \qquad (3)$$

Здесь и далее двумя точками обозначается свертка, правым верхним индексом $*$ – транспонирование, нижним левым τ – момент времени, относительно которого величина определяется. Буквой V обозначается объем конечного элемента, $\hat{S}$ – второй тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа, $\hat{C}$ – тензор четвертого ранга, компоненты которого зависят от физических констант материала.

Выражения для определения линейной ${}_{\tau}\hat{e}$ и нелинейной ${}_{\tau}\hat{\eta}$ составляющих приращения тензора деформаций Грина-Лагранжа будут даны ниже. Отметим, что при использовании общего лагранжевого подхода /I/ $\tau = 0$, а при использовании модифицированного лагранжевого подхода $\tau = t$.

Для вывода формул, определяющих ${}^{t}K_{L}$, традиционно используется следующая схема. Записывая (2) в матричной форме:

$$\delta V^{*}\,{}^{t}K_{L}V = \int_{{}^{\tau}V} \delta\,{}_{\tau}e^{*}\,\tilde{C}_{L}\,{}_{\tau}e\;{}^{\tau}dV \qquad (4)$$

и выражая матрицу-столбец ${}_\tau e$ через приращения узловых перемещений

$$ {}_\tau e = \tilde{\beta}_L V, \tag{5}$$

можно прийти к выражению для определения линейной матрицы жесткости

$$ {}^t K_L = \int_{{}^\tau V} \tilde{\beta}_L^* \, \tilde{C}_L \, \tilde{\beta}_L \, {}^\tau dV. \tag{6}$$

Здесь $\tilde{C}_L$ - матрица, содержащая компоненты тензора ${}_\tau\hat{C}$.

Ниже будет показано, что для матрицы ${}^t K_{NL}$ получается формула

$$ {}^t K_{NL} = \int_{{}^\tau V} \beta^*_{NL} \, C_{NL} \, \beta_{NL} \, {}^\tau dV, \tag{7}$$

подобная (6), в которой элементы матрицы C_{NL} вычисляются по определенному правилу с помощью компонентов тензора ${}^t_\tau\hat{S}$ и метрического тензора $\hat{E}$.

При традиционной схеме вычислений матрицы $\tilde{\beta}_L$ и β_{NL} имеют различную структуру и размерность, что приводит к необходимости применять различные программы для их вычисления. В настоящей статье предлагается подход, позволяющий устранить этот недостаток.

Тензор деформации Грина-Лагранжа определяется /2/ соотношением

$$ {}^t_\tau\hat{\mathcal{E}} = ({}^\tau\nabla \, {}^t R \cdot {}^\tau\nabla \, {}^t R^* - \hat{E})/2 , \tag{8}$$

где точкой обозначено скалярное умножение тензоров, ${}^t R$ - радиус-вектор, ${}^\tau\nabla$ - символический вектор набла-оператора Гамильтона:

$$ {}^\tau\nabla = {}^\tau R^k \frac{\partial}{\partial q^k} . \tag{9}$$

Здесь q^k - материальные координаты, ${}^\tau R^k$ - векторы базиса, взаимного с базисом

$$ {}^\tau R_k = {}^\tau R_{,k} \qquad (K = 1,2,3). \tag{10}$$

Для упрощения запятой обозначается дифференцирование по материальной координате и принято обычное правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Обозначая через $\bar{u}$ приращение радиуса-вектора точки

$$ \bar{u} = {}^{t+\Delta t} R - {}^t R \tag{11}$$

и учитывая, что

$$_\tau\hat{e} + {_\tau\hat{\eta}} = {^{t+\Delta t}_{\tau}\hat{\varepsilon}} - {^{t}_{\tau}\hat{\varepsilon}},$$

можно прийти к выражениям для $_\tau\hat{e}$, $_\tau\hat{\eta}$ и их вариаций:

$$_\tau\hat{e} = 0{,}5\,(\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}\cdot\overset{\tau}{\nabla}{}^{t}R^{*} + \overset{\tau}{\nabla}{}^{t}R\cdot\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}^{*}),$$

$$_\tau\eta = 0{,}5\,\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}\cdot\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}^{*},$$

$$\delta\,{_\tau\hat{e}} = 0{,}5\,(\overset{\tau}{\nabla}\delta\bar{u}\cdot\overset{\tau}{\nabla}{}^{t}R^{*} + \overset{\tau}{\nabla}{}^{t}R\cdot\overset{\tau}{\nabla}\delta\bar{u}^{*}),$$

$$\delta\,{_\tau\eta} = 0{,}5\,(\overset{\tau}{\nabla}\delta\bar{u}\cdot\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}^{*} + \overset{\tau}{\nabla}\bar{u}\cdot\overset{\tau}{\nabla}\delta\bar{u}^{*}).$$

Подставляя (I3), (I5), (I6) в (2) и (3), приходим к соотношениям:

$$\delta V^{*\,t}K_{L}\,V = \int_{^{\tau}V}\delta\hat{a} : {_\tau\hat{C}} : \hat{a}\;{^{\tau}dv},$$

$$\delta V^{*\,t}K_{NL}\,V = \int_{^{\tau}V}\overset{\tau}{\nabla}\delta\bar{u}^{*} : ({^{t}_{t}\hat{S}}\cdot\overset{\tau}{\nabla}\bar{u})\;{^{\tau}dv},$$

где

$$\hat{a} = \overset{\tau}{\nabla}\bar{u}\cdot\overset{\tau}{\nabla}{}^{t}R^{*}.$$

В компонентном виде (I7) и (I8) выглядят следующим образом:

$$\delta V^{*\,t}K_{L}\,V = \int_{^{\tau}V}\delta a_{ij}\,C^{ijkl}\,a_{kl}\;{^{\tau}dv},$$

$$\delta V^{*\,t}K_{NL}\,V = \int_{^{\tau}V}\nabla_i\,\delta u_j\,S^{ik}g^{jl}\,\nabla_k u_l\;{^{\tau}dv}.$$

Здесь соответствующие компоненты определяются выражениями

$$\hat{a} = a_{ij}\,{^{\tau}R^{i}}\,{^{\tau}R^{j}}, \qquad \hat{E} = g^{jl}\,{^{\tau}R_{j}}\,{^{\tau}R_{l}},$$

$$\overset{\tau}{\nabla}\bar{u} = \nabla_i u_j\,{^{\tau}R^{i}}\,{^{\tau}R^{j}}, \quad {^{t}_{\tau}\hat{S}} = S^{ik}\,{^{\tau}R_{i}}\,{^{\tau}R_{k}},$$

$$_\tau\hat{C} = C^{ijkl}\,{^{\tau}R_{i}}\,{^{\tau}R_{j}}\,{^{\tau}R_{k}}\,{^{\tau}R_{l}}.$$

Из анализа соотношений (20) и (21) очевидно, что их можно представить также и в матричном виде:

$$\delta V^{*}\,{}^{t}K_{L}\,V = \int_{{}^{\tau}V} \delta a^{*} C_{L}\, a\, {}^{\tau}dV, \tag{23}$$

$$\delta V^{*}\,{}^{t}K_{NL}\,V = \int_{{}^{\tau}V} \delta b^{*} C_{NL}\, b\, {}^{\tau}dV, \tag{24}$$

где a и b – матрицы-столбцы, составленные из ковариантных компонентов тензоров $\hat{a}$ и ${}^{\tau}\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}$ соответственно.

Выражая a и b через приращения узловых перемещений

$$a = \beta_{L} V, \qquad b = \beta_{NL} V, \tag{25}$$

можно прийти к выражениям (7) для ${}^{t}K_{NL}$, а для вычисления ${}^{t}K_{L}$ получить формулу

$${}^{t}K_{L} = \int_{{}^{\tau}V} \beta_{L}^{*} C_{L} \beta_{L}\, {}^{\tau}dV. \tag{26}$$

Для выяснения структуры матриц β_{L} и β_{NL} необходимо рассмотреть вид компонентов тензоров $\hat{a}$ и $\overset{\tau}{\nabla}\bar{u}$.

Из формулы для вычисления компонентов произвольного тензора /2/

$$Q_{ij} = {}^{\tau}R_{i} \cdot \hat{Q} \cdot {}^{\tau}R_{j} \tag{27}$$

следуют выражения

$$a_{ij} = \bar{u}_{,i} \cdot {}^{t}R_{,j}\,; \quad \nabla_{i} u_{j} = \bar{u}_{,i} \cdot {}^{\tau}R_{,j}\,. \tag{28}$$

Видно, что при применении модифицированного лагранжева подхода ($\tau = t$) $a_{ij} = \nabla_{i} u_{j}$, откуда следует $a = b$, что в свою очередь влечет $\beta_{NL} = \beta_{L}$. При $\tau = 0$ соответствующие компоненты отличаются лишь множителем, для вычисления которого в одном случае применяются текущие, а в другом начальные координаты. Структура же формул полностью совпадает, откуда и следует совпадение структуры β_{L} и β_{NL}.

Для иллюстрации вышесказанного приводится конечный элемент трехмерного пространства. Текущий радиус-вектор и приращение перемещений даются формулами

$$ {}^{t}R = {}^{t}x_{k}\, e^{k}, \qquad \bar{u} = u_{k}\, e^{k}, \tag{29} $$

где e^{k} – орты неподвижной декартовой системы координат.

Пусть выражение для приращений перемещений имеет вид

$$ u_{k} = \sum_{m=1}^{N} h_{m} V_{k}^{m} \qquad (k = 1,2,3), \tag{30} $$

где h_m – m -ая функция формы, V_k^m – k -тое приращение перемещения узла m , N – число узлов в элементе.

Тогда, вводя матрицы-столбцы

$$ \mathbf{V} = [V_1^1\, V_2^1\, V_3^1\; V_1^2\, V_2^2\, V_3^2 \dots V_1^N\, V_2^N\, V_3^N]^*, \tag{31} $$

$$ \mathbf{a} = [a_{11}\, a_{21}\, a_{31}\; a_{12}\, a_{22}\, a_{32}\; a_{13}\, a_{23}\, a_{33}]^*, \tag{32} $$

$$ \mathbf{b} = [\nabla_1 u_1\, \nabla_2 u_1\, \nabla_3 u_1\; \nabla_1 u_2\, \nabla_2 u_2\, \nabla_3 u_2\; \nabla_1 u_3\, \nabla_2 u_3\, \nabla_3 u_3]^*, \tag{33} $$

можно получить матрицы β_L и β_{NL} в блочном виде

$$ \beta_L = \{\beta_{km}^{L}\}; \quad \beta_{NL} = \{\beta_{km}^{NL}\}, \quad (k = 1,2,3; \quad m = 1 \dots N), \tag{34} $$

где элементы соответствующих подматриц определяются соотношениями

$$ \{\beta_{km}^{L}\}_{ij} = h_{m,i}\, {}^{t}x_{j,k}; \quad \{\beta_{km}^{NL}\}_{ij} = h_{m,i}\, {}^{\tau}x_{j,k} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{35} $$

Матрицы $\mathbf{C}_L$ и $\mathbf{C}_{NL}$ в этом случае имеют вид

$$ \mathbf{C}_L = \{\mathbf{C}_{km}^{L}\}, \quad \mathbf{C}_{NL} = \{\mathbf{C}_{km}^{NL}\}, \quad (k, m = 1,2,3) \tag{36} $$

$$ \{\mathbf{C}_{km}^{L}\}_{ij} = C^{ikjm}, \quad \{\mathbf{C}_{km}^{NL}\}_{ij} = S^{ij} g^{km} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{37} $$

Таким образом, как уже отмечалось выше, матрицы ${}^{t}\mathbf{K}_L$ и ${}^{t}\mathbf{K}_{NL}$ можно вычислять одной программой, меняя лишь во входных параметрах текущие координаты на начальные и $\mathbf{C}_L$ на $\mathbf{C}_{NL}$. При $\tau \equiv t$ можно вычислять сразу суммарную матрицу жесткости по формуле (26), взяв вместо матрицы C_L сумму матриц C_L и C_{NL}, что приводит к экономии времени счета.

Библиографический список

1. Bathe K.-J. The finite procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982, 615 p.

2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

УДК 539.3:629.7.015.4

В.Н.Столяров, С.Х.Хазанов

РАСЧЕТ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Математическая модель строится на базе деформационной теории пластичности и учитывает квадратичную геометрическую нелинейность. Расчет реализуется полуаналитическим методом конечных элементов, в котором за основные неизвестные принимаются коэффициенты разложения перемещений в ряд по окружной координате.

При расчете оболочек вращения часто применяют разложение искомых величин в тригонометрические ряды по окружной координате. Если расчет ведется в линейной постановке, то при этом задача распадается на ряд менее сложных задач для отдельных гармоник, к каждой из которых можно применить метод конечных элементов (МКЭ). Такая процедура обоснована Зенкевичем /1/ и названа им полуаналитическим МКЭ. Полуаналитический МКЭ в применении к оболочкам вращения изложен в работе /2/, в которой оболочка вращения разбивается на конечные элементы, имеющие вид усеченных конусов.

Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Куйбышев, 1990