

УДК 539.3:629.7.015.4

В.Н.Паймушин, А.Ю.Одинокоев

К РАСЧЕТУ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ СО СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

Для расчета двухслойных оболочек со слоями переменной толщины в работе /1/ предложен вариант теории, в котором учтены поперечные сдвиги в каждом из слоев по гипотезам прямой линии С.П.Тимошенко, а также приняты во внимание различия в базисных векторах на срединных поверхностях слоев. При этом толщины слоев оболочки предполагались средними, а их изменение достаточно плавным, удовлетворяющим условиям работы /2/.

В дальнейшем в работах /3,4/ на основе соотношений /1/ был разработан численный метод решения задач статики и термоупругости оболочек вращения при осесимметричных деформациях. Данная статья посвящена применению указанных соотношений к расчету двухслойных оболочек вращения при произвольном несимметричном нагружении (рис.1). Так же, как и в /3,4/, рассматриваются оболочки, у которых толщина измеряется лишь в меридиональном направлении. При этом имеют место соотношения дифференциальной геометрии работы /3/.

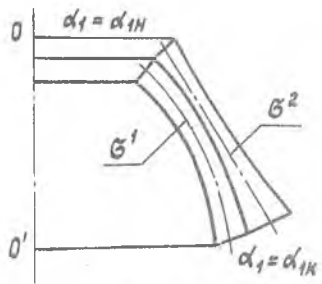


Рис. 1

Зависимости между компонентами векторов перемещений u_i^K , w^K ($i, k = 1, 2$) срединных поверхностей слоев оболочки и углами поворота нормалей к этим поверхностям ψ_i^K запишутся:

$$u_1^2 = u_1^1 + \sum_{k=1}^2 h^k \psi_1^k + y_1 w^1, \quad u_2^2 = u_2^1 + \sum_{k=1}^2 h^k \psi_2^k, \quad (I)$$

$$w^2 = w^1 - y_1 (u_1^1 + h^1 \psi_1^1).$$

Здесь и далее приняты основные обозначения работы /1/: $2h^k$ - толщины слоев, y_1 - коэффициент, учитывающий взаимный наклон

слоев, верхний индекс - номер

Соотношения теории деформации слоев примут вид

$$A_1^k e_{11}^k = u_{1,1}^k + A_1^k K_{11}^k w^k; \quad A_1^k e_{12}^k = u_{2,1}^k; \quad A_1^k e_{13}^k = w_{,1}^k - A_1^k K_{11}^k u_{,1}^k; \quad (2)$$

$$A_1^k E_{11}^k = \psi_{1,1}^k; \quad A_1^k E_{12}^k = \psi_{2,1}^k;$$

$$A_1^k A_2^k e_{22}^k = A_1^k u_{2,2}^k + A_{2,1}^k u_{1,1}^k + A_2^k K_{22}^k w^k; \quad A_1^k A_2^k e_{21}^k =$$

$$= A_1^k u_{1,2}^k - A_{2,1}^k u_{2,1}^k; \quad A_2^k e_{23}^k = w_{,2}^k - A_2^k K_{22}^k u_{2,1}^k; \quad (3)$$

$$A_1^k A_2^k E_{22}^k = A_1^k \psi_{2,2}^k + A_{2,1}^k \psi_{1,1}^k; \quad A_1^k A_2^k E_{21}^k = A_1^k \psi_{1,2}^k - A_{2,1}^k \psi_{2,1}^k; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij}^{kz} = \frac{e_{ij}^k + z^k E_{ij}^k}{1 + K_{ii}^k z^k}; \quad \gamma_{i3}^{kz} = \frac{e_{i3}^k + \psi_i^k}{1 + K_{ii}^k z^k}; \quad \gamma_{12}^{kz} = \varepsilon_{12}^{kz} + \varepsilon_{21}^{kz}; \quad (i, j, k = 1, 2)$$

Погонные усилия и моменты определяются зависимостями

$$T_{11}^k = \int_{-h^k}^{h^k} \sigma_{11}^k (1 + K_{22}^k z^k) dz^k; \quad \dots; \quad M_{12}^k = \int_{-h^k}^{h^k} \sigma_{12}^k (1 + K_{22}^k z^k) z^k dz^k; \quad (5)$$

$$M_{11} = M_{11}^1 + \theta_2 h^1 (T_{11}^2 - y_1 T_{13}^3); \quad N_{11} = T_{11}^1 + \theta_2 (T_{11}^2 - y_1 T_{13}^2);$$

$$M_{12} = M_{12}^1 + \theta_2 h^1 (T_{12}^2 - y_2 T_{23}^2); \quad N_{12} = T_{12}^1 + \theta_2 (T_{12}^2 - y_2 T_{23}^2);$$

$$H_{11} = \theta_2 (M_{11}^2 + h^2 T_{11}^2); \quad N_{13} = T_{13}^1 + \theta_2 (T_{13}^2 + y_1 T_{11}^2); \quad (6)$$

$$H_{12} = \theta_2 (M_{12}^2 + h^2 T_{12}^2),$$

где для нижнего индекса следует выполнить еще замену ($I \neq 2$), после чего положить $y_2 = 0$, θ_i - коэффициенты, учитывающие различие в метриках срединных поверхностей слоев /I/.

Равенства для внешних погонных усилий и моментов, приложенных к граничным срезам, не будут отличаться от (5) - (6) ничем, кроме знака \sim , которым помечаем нагрузочные члены. Для прочих нагрузочных членов справедливы соотношения работы /I/, где следует положить $y_2 = 0$.

Систему уравнений равновесия /I/ запишем в следующей форме:

$$(A_2^l N_l)_{,1} + \lambda_l + \tilde{q}_l = 0, \quad (l = \overline{1,7}), \quad (7)$$

где обозначено

$$\{N_l\} = \{N_{11}, N_{12}, N_{13}, M_{11}, M_{12}, H_{11}, H_{12}\}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= g_1^1 + g_1^2 - y_1 g_3^2 + y_{1,1} A_2^2 T_{23}^2; & \lambda_2 &= g_2^1 + g_2^2; \\
 \lambda_3 &= g_3^1 + g_3^2 + y_1 g_1^2 - y_{1,1} A_2^2 T_{11}^2; & \lambda_4 &= g_4^1 + h^1 (g_1^2 - \\
 & - y_1 g_3^2) + A_2^2 T_{13}^2 (y_1 h^1)_{,1} - h_{,1}^1 A_2^2 T_{11}^2; & \lambda_5 &= g_5^1 + \\
 & + h^1 g_2^2 - h_{,1}^1 A_2^2 T_{12}^2; & \lambda_6 &= g_4^2 + h^2 g_1^2 - h_{,1}^2 A_2^2 T_{11}^2; \\
 \lambda_7 &= g_5^2 + h^2 g_2^2 - h_{,1}^2 A_2^2 T_{12}^2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Для величин g_i^K имеют место формулы

$$\begin{aligned}
 g_1^K &= A_{1,1}^K T_{21,2}^K - A_{2,1}^K T_{22}^K + A_{1,1}^K A_{2,1}^K K_{11}^K T_{13}^K; \\
 g_2^K &= A_{1,1}^K T_{22,2}^K + A_{2,1}^K T_{21}^K + A_{1,1}^K A_{2,1}^K K_{22}^K T_{23}^K; \\
 g_3^K &= A_{1,1}^K T_{23,2}^K - A_{1,1}^K A_{2,1}^K (K_{11}^K T_{11}^K + K_{22}^K T_{22}^K); \\
 g_4^K &= A_{1,1}^K M_{21,2}^K - A_{2,1}^K M_{22}^K - A_{1,1}^K A_{2,1}^K T_{13}^K; \\
 g_5^K &= A_{1,1}^K M_{22,2}^K + A_{2,1}^K M_{21}^K - A_{1,1}^K A_{2,1}^K T_{23}^K.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Система (7), как и в общем случае /I/, записывается в частных производных и имеет 14 порядок, однако входящие в уравнения величины определяются несколько более простыми зависимостями.

Введя в рассмотрение соотношения закона Гука для ортотропного материала с учетом теплового воздействия, замкнем систему соотношений задачи. Считаем плоскости упругой симметрии перпендикулярными соответствующим координатным линиям, а физико-механические характеристики материалов неизменными в окружном направлении.

Для решения задачи воспользуемся широко известным приемом разделения переменных с помощью разложения функций в тригонометрические ряды по окружной координате. Поскольку ограничения, связанные с требованием неизменяемости коэффициентов дифференциальных уравнений в окружном направлении, нами выполнены, представим функции внешней нагрузки, температурного поля, граничных условий и факторов напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки в виде разложений в тригонометрические ряды по окружной координате $\varphi = \alpha_2$. Например:

$$\begin{aligned}
 u_1^K &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} (u_{1,\alpha}^K \cos \alpha \varphi + \bar{u}_{1,\alpha}^K \sin \alpha \varphi), \\
 u_2^K &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} (\bar{u}_{2,\alpha}^K \cos \alpha \varphi + u_{2,\alpha}^K \sin \alpha \varphi),
 \end{aligned} \tag{II}$$

$$\tilde{N}_n = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (\tilde{N}_{n,2\alpha} \cos \alpha \varphi + \tilde{N}'_{n,2\alpha} \sin \alpha \varphi),$$

где φ - угол поворота меридиональной плоскости около оси симметрии.

Подставив разложения вида (II) в соотношения задачи (I) - (2) и (4) - (9), соберем члены с одинаковым порядковым номером α , отдельно с чертой и без черты. Для амплитудных величин каждой гармоники придем к соотношениям, ничем не отличающимся от (I) - (2) и (4) - (9), кроме индекса α ; который будем в дальнейшем опускать. В соотношениях же (3) и (10) производные в окружном направлении заменяются произведениями следующего вида:

$$\begin{aligned} T_{2i,2}^K &\rightarrow -\alpha_i \alpha T_{2i}^K; & T_{23,2}^K &\rightarrow -\alpha_1 \alpha T_{23}^K; & M_{2i,2}^K &\rightarrow -\alpha_i \alpha M_{2i}^K; \\ U_{i,2}^K &\rightarrow -\alpha_i \alpha U_i^K; & w_{,2}^K &\rightarrow \alpha_1 \alpha w^K; & \psi_{i,2}^K &\rightarrow \alpha_i \alpha \psi_i^K \end{aligned} \quad (12)$$

($i, k = 1, 2$).

Причем величины без черты имеют коэффициенты: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$; с чертой: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$. В остальных соотношениях (3) и (10) также не меняются при их использовании для амплитудных величин.

Введя обозначения

$$v_i = U_i^1; \quad v_3 = w^1; \quad v_{i+3} = \psi_i^1; \quad v_{i+5} = \psi_i^2; \quad (i = 1, 2), \quad (13)$$

запишем граничные условия в форме, предложенной в /5/:

$$(1 - \delta_{iN})(v_{iN} - \tilde{v}_{iN}) + \delta_{iN}(N_{iN} - \tilde{N}_{iN}) = 0,$$

$$(1 - \delta_{iK})(v_{iK} - \tilde{v}_{iK}) + \delta_{iK}(N_{iK} - \tilde{N}_{iK}) = 0 \quad (i = \overline{1, 7}), \quad (14)$$

где индексом N помечены значения функций на краю оболочки, который соответствует началу интервала изменения α_1 , индексом K - значения на другом краю оболочки (рис. I); целочисленные коэффициенты δ_i в формулах (14) принимают два значения: 0 - если на краю задано значение величины \tilde{v}_i , и 1 - если на краю задано значение погонного усилия или момента \tilde{N}_i .

Вводя в соотношения закона Гука формулы (4), выполним интегрирование по толщине в соответствии с (5). Подставляя

зависимости (2) и (3) в полученные выражения, придем к соотношениям упругости, которые запишем для амплитудных величин в матричной форме, используя равенства (I) и замены (I2):

$$\{T_i^K\} = [\hat{T}_{ij}^K] \times \{x_j\} + \{\hat{T}_{ti}^K\}, \quad (i = \overline{1,10}; j = \overline{1,14}), \quad (I5)$$

где

$$\{x_j\} = \{v_{1,1}; v_1; v_{2,1}; v_2; \dots; v_{7,1}; v_7\}, \quad (I6)$$

$$\{T_i^K\} = \{T_{11}^K; T_{12}^K; T_{13}^K; M_{11}^K; M_{12}^K; T_{22}^K; T_{21}^K; T_{23}^K; M_{22}^K; M_{21}^K\}, \quad (I7)$$

а коэффициенты прямоугольной матрицы $[\hat{T}_{ij}^K]$ определяются путем несложных, но довольно громоздких преобразований, описанных выше.

Подставив соотношения (I5) в равенстве (6), (9) и (I0) и учтя обозначения (8) и замены (I2), перепишем (6), (9) и (I0) в форме, аналогичной (I5):

$$\begin{aligned} \{g_e^K\} &= [\hat{g}_{ij}^K] \times \{x_j\} + \{\hat{g}_{ti}^K\} \\ \{N_i\} &= [\hat{N}_{ij}^K] \times \{x_j\} + \{\hat{N}_{ti}^K\} \\ \{\lambda_i\} &= [\hat{\lambda}_{ij}^K] \times \{x_j\} + \{\hat{\lambda}_{ti}^K\} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (\ell = \overline{1,5}; i = \overline{1,7}; \\ j = \overline{1,14}) \end{aligned} \quad (I8)$$

Здесь для коэффициентов, помеченных знаком $\hat{\Lambda}$, по-прежнему справедливы зависимости вида (6), (9), (I0), но со знаком $\hat{\Lambda}$ над соответствующими величинами.

Для решения полученной одномерной краевой задачи воспользуемся устойчивым численным методом конечных сумм в варианте интегрирующих матриц М.Б.Вахитова /6, 7/.

С помощью интегральных операторов \mathcal{J}_1 и \mathcal{J}_2 /6, 7/ выразим функции v_i через их производные и значения на границе

$$v_i = \mathcal{J}_1 v_{i,1} + v_{iH} \quad (I9)$$

и преобразуем уравнения равновесия к интегральной форме

$$A'_2 N_i - \mathcal{J}_2 (\lambda_i + \tilde{q}_i) - A'_{2K} N_{iK} = 0. \quad (20)$$

Далее, пользуясь (I9), исключим функции v_i , а также их значения v_{iK} из соотношений (I4), (I6), (I5) и (I8). Затем

подставим (18) в уравнения равновесия (20) и граничные условия (14). Присоединив граничные условия к системе уравнений равновесия и перейдя к дискретному аналогу интегральных операторов и других величин задачи, придем к одному разрешающему матричному уравнению

$$[A] \times \{y\} = \{B\} \quad (21)$$

относительно вектора неизвестных

$$\{y\} = \{v_{1,1}; v_{2,1}; \dots; v_{7,1}; v_{1n}; v_{2n}; \dots; v_{7n}; N_{1k}; N_{2k}; \dots; N_{7k}\}. \quad (22)$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (22) порядка $7 \times N + 14$, находим функции $v_{i,1}$ в N выбранных расчетных точках и константы интегрирования v_{in} . Затем с помощью формул (19) определяем и сами функции v_i , а по ним и все прочие амплитудные величины в расчетных сечениях по меридиану. Суммируя решения для отдельных гармоник, получаем решение двумерной краевой задачи.

Изложенный метод расчета был реализован практически без дополнительных упрощающих допущений в виде вычислительного комплекса с пакетом программ на языке ФОРТРАН ОС ЕС ЭВМ. Он является весьма универсальным и применялся для решения широкого класса задач статики и термоупругости двухслойных и однослойных оболочек вращения.

С целью иллюстрации сходимости решения и достоверности полученных результатов в таблице I приведены результаты расчета эллипсоидальной оболочки (рис.2), подверженной действию нормальной поверхностной нагрузки $q = q_0 \cos \alpha \varphi$. Представлено также сравнение с данными расчета, имеющимися в книге /8/, в которой для решения одномерной задачи использовался метод дискретной ортогонализации.

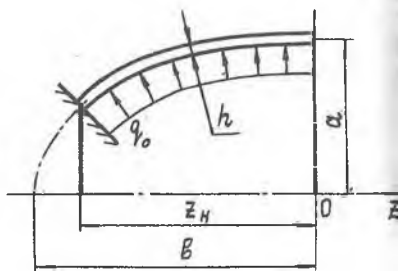


Рис. 2

Расчеты производились при следующих исходных данных: $a = 6$ м, $b = 10$ м, $h = 0,2$ м, $z_H = -9$ м, $E_1 = 0,72 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 2E_1$, $\nu_1 = 0,075$, $G_{12} = 0,3E_1$, $q_0 = 0,2$ МПа. Использовалась сетка расчетных сечений с неравномерным шагом, изменявшимся в точке $z = -7,2$. Число сечений принималось равным $2I = 12 + 9$ и $40 = 23 + 17$. Как видно из таблицы, решение рассматриваемой задачи сходится уже при $2I$ расчетном сечении и не меняется при удвоении их числа. Небольшое отличие от решения /8/ объясняется, по-видимому, различием гипотез, положенных в основу расчетных соотношений.

Таблица I

		z/z_H	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$z = 1$	ω мм	Реш. [8]	0	1,060	1,629	1,977	2,170	2,233
		$N = 2I$	0	1,060	1,630	1,978	2,171	2,233
		$N = 40$	0	1,059	1,629	1,977	2,170	2,233
	$\frac{M_{12}}{N_H}$ МПа	Реш. [8]	14,77	16,53	17,13	17,44	17,62	17,68
		$N = 2I$	14,74	16,56	17,15	17,45	17,63	17,69
		$N = 40$	14,74	16,56	17,14	17,45	17,63	17,69
	$M_{12} \cdot 10^{-2}$ МПа	Реш. [8]	-12,35	-2,202	-0,4554	0,1443	0,3762	0,4402
		$N = 2I$	-11,80	-2,222	-0,4624	0,1433	0,3753	0,4391
		$N = 40$	-11,80	-2,220	-0,4529	0,1433	0,3756	0,4394
$z = 4$	ω мм	Реш. [8]	0	0,8856	1,508	2,149	2,508	2,631
		$N = 2I$	0	0,9028	1,621	2,188	2,552	2,677
		$N = 40$	0	0,9027	1,621	2,187	2,552	2,667
	$\frac{M_{12}}{N_H}$ МПа	Реш. [8]	6,490	1,365	17,74	20,28	21,74	22,20
		$N = 2I$	6,669	13,93	18,06	20,63	22,10	22,58
		$N = 40$	6,670	13,93	18,05	20,63	22,10	22,58
	M_{12} МПа	Реш. [8]	-0,1120	0,7114	0,8942	0,9950	1,051	1,069
		$N = 2I$	-0,1067	0,7105	0,8975	1,001	1,058	1,076
		$N = 40$	-0,1067	0,7104	0,8974	1,001	1,058	1,076

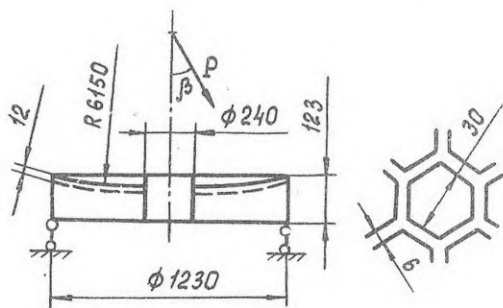


Рис. 3

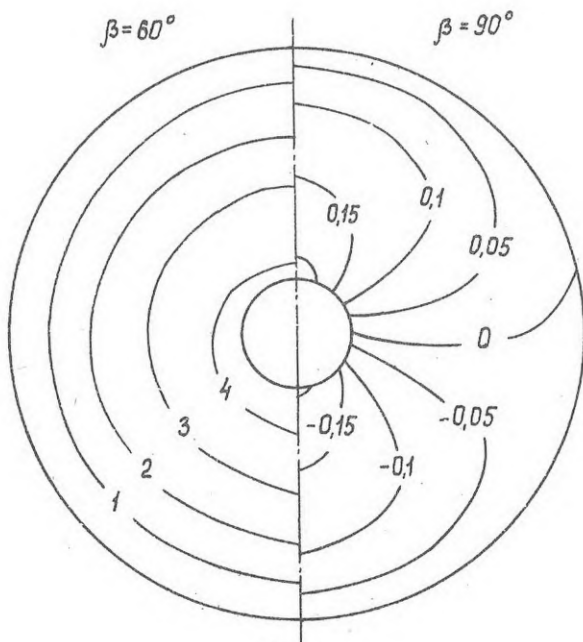


Рис. 4

Были произведены также исследования деформированного состояния облегченного оптического зеркала астростанции (рис. 3, размеры даны в миллиметрах), нагруженного силами собственного веса P , действующими под различными углами β к оси симметрии. Облегчение зеркала достигнуто за счет сетки правильных сквозных шестигранных отверстий, образующих сотовую конструкцию. Перфорированная часть зеркала рассматривалась как оболочечный слой с приведенными упругими характеристиками, которые определялись по формулам работы [9]. Материал зеркала - бериллий, его характеристики: $E = 0,294 \cdot 10^6$ МПа; $\nu = 0,039$; удельный вес $\gamma = 0,182$ Н/м³. Как видно из рисунка 4, где изображены линии равных прогибов зеркальной поверхности (в разрывах линий на величина прогиба в микрометрах) при больших углах наклона $\beta \gg 60^\circ$ абсолютные значения прогибов зеркала незначительны, но формы изолиний на зеркальной поверхности сильно отличаются от окружностей.

Л и т е р а т у р а

1. Паймушин В.Н., Одинокоев А.Ю. К линейной теории двухслойных оболочек со слоями переменной толщины. - В межвуз. сб.: Вопросы прочности и долговечности авиационных конструкций, вып. 4, ИГиЛ, М., 1978, с. 19-25.
2. Паймушин В.Н., Галимов Н.К. К общей теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины. - В сб.: Труды семинара по теории оболочек, вып. 6, Казань, Казанский физико-технический институт АН СССР, 1975, с. 7-20.
3. Паймушин В.Н., Одинокоев А.Ю. Разрешающие уравнения для двухслойных оболочек вращения со слоями переменной толщины при несимметричных деформациях. - В межвуз. сб.: Динамика и прочность авиационных конструкций, вып. 4, Новосибирск, ИГиЛ, 1978, с. 176-183.
4. Одинокоев А.Ю. Некоторые результаты численного исследования напряженно-деформированного состояния двухслойных осесимметричных оболочек вращения. - В межвуз. сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных и монолитных авиационных конструкций, Казань, 1980, с. 68-71.
5. Паймушин В.Н. Некоторые задачи статики замкнутых оболочек

сложной формы и об одном методе их численного решения. - В междуу. сб.: Вопросы расчета прочности конструкции летательных аппаратов, вып. 2, Казань, КАИ, 1979, с. 67-75.

6. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. - ИВУЗ, Авиационная техника, 1966, № 3, с. 50-61.

7. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Снигирев В.Ф. Расчет крыльевых устройств судов на прочность. - Казань: Таткнигоиздат, 1975. - 212 с.

8. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. - Киев: Наукова думка, 1973. - 228 с.

9. D'Silva E. Bending of perforated plates. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Ser. E.*, 1962, v. 29, № 4, 749-750.

УДК 629.7.015.4:539.3

Б.А.Коновалов, Е.А.Пеньков

РАСЧЕТ СКОШЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОБОБЩЕННЫХ ПОГОННЫХ И СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК

Особенность работы скошенных оболочек состоит в том, что вследствие косо́го закрепления поперечные нагрузки вызывают как изгиб, так и кручение конструкции, иначе, в таких оболочках изгиб не отделяется от кручения. Определение напряженно-деформированного состояния в скошенных или стреловидных оболочках, нагруженных обобщенными погонными и сосредоточенными поперечными нагрузками, является целью настоящего исследования. Задача состоит в том, чтобы получить алгоритмы для напряжений и перемещений в стреловидном кессонном крыле самолета.

Исследования проводятся на основе обобщенного метода перемещений академика Образцова И.Ф. /1, 2, 3/ с использованием пространственных функций депланации и точечных граничных условий в сечении косо́й заделки.

Продольное $u(x, s)$ и поперечное $v(x, s)$ перемещения точек