ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 534.I

Ю.И.Филиппов, Х.С.Хазанов

К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ, НАТЯНУТОЙ НА УПРУГУЮ РАМУ

В [5] рассмотрена линейная задача о колебаниях рамы с натянутой на нее мембраной и изложен один из возможных методов ее решения. Здесь предлагается несколько иной подход к решению этой задачи, основанный на применении метода конечных элементов. Обсуждаемый метод позволяет получать решение принципиально достаточно близкое к точному. Кроме того, в силу своей специфики он может быть в некоторых случаях использован для оценки точности других, более простых методов расчета.

Для его построения используем известную идею о применении суперэлементов [4] в следующем варианте. Объединяем элементы мембраны, составляющие целую ячейку, в один суперэлемент. Под ячейками понимаются минимальные связные [3] области мембраны, на которые она разделяется опорным контуром, то есть множеством точек ее крепления к раме. При этом в число узлов данного суперэлемента включаем лишь те узлы, в которых элементы мембраны связаны с элементами рамы. Перемещения узлов мембраны, лежащих внутри ячеек, исключаем из общей системы уравнений (способы исключения будут разобраны ниже).

Таким образом, в общей системе уравнений фигурируют только перемещения узлов рамы; то есть, выполнив формирование матриц масс и жесткостей системы по изложенной схеме, мы получаем как бы некоторую раму, эквивалентную исходной конструкции.

Свободные колебания мембраны, натянутой на упругую раму, с учетом вышесказанного могут быть описаны следующей системой уравнений:

$$M_p \ddot{X}_p + K_p X_p - P_p = 0, \qquad (I)$$

$$M_k \ddot{X}_k + K_k X_k - P_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где X_p – вектор обобщенных перемещений рамы; M_p – матрица масс рамы без мембраны; K_p – матрица жесткости рамы без мембраны;

P_p – вектор обобщенных сил, действующих на раму со стороны мембраны;

$X_k = \begin{bmatrix} X_{ak} \\ X_{ik} \end{bmatrix}$ – вектор обобщенных перемещений k-той ячейки мембраны, компоненты которого сгруппированы по признаку принадлежности к контурным узлам – X_{ak} или к внутренним – X_{ik};

$M_k = \begin{bmatrix} M_{aa_k} & M_{ai_k} \\ M_{ia_k} & M_{ii_k} \end{bmatrix}$ – матрица масс k-той ячейки мембраны, отделенной от рамы;

$K_k = \begin{bmatrix} K_{aa_k} & K_{ai_k} \\ K_{ia_k} & K_{ii_k} \end{bmatrix}$ – матрица жесткости k-той ячейки мембраны, отделенной от рамы;

$P_k = \begin{bmatrix} P_{ak} \\ 0 \end{bmatrix}$ – вектор обобщенных сил, действующих со стороны рамы на k-тую ячейку мембраны; n – число ячеек мембраны (число суперэлементов).

Условие совместности перемещений выражается равенством

$$X_{ak} = H_k X_p, \qquad (3)$$

а условие самоуравновешенности внутренних усилий –

$$P_p = -\sum_k H_k^T P_{ak}, \qquad (4)$$

где H_k – матрица, устанавливающая соответствие между обобщенными перемещениями рамы и k-той ячейки мембраны.

Развернем уравнение (2), выполнив умножение (индекс k там, где это не вызывает неясности, опускаем).

$$M_{aa}\ddot{X}_a + M_{ai}\ddot{X}_i + K_{aa}X_a + K_{ai}X_i - P_a = 0, \qquad (5)$$

$$M_{ia}\ddot{X}_a + M_{ii}\ddot{X}_i + K_{ia}X_a + K_{ii}X_i = 0. \qquad (6)$$

С учетом периодичности искомого решения равенства (5), (6) можно заменить следующей записью:

$$(K_{ii}-\omega^2 M_{ii})X_i+(K_{ia}-\omega^2 M_{ia})X_a=0 \qquad (7)$$

$$P_a=(K_{aa}-\omega^2 M_{aa})X_a+(K_{ai}-\omega^2 M_{ai})X_i\,, \qquad (8)$$

где ω - частота совместных колебаний мембраны и рамы.

Полагая, что $|K_{ii}-\omega^2 M_{ii}|\neq 0$, получим из (7) и (8)

$$P_a=[(K_{aa}-\omega^2 M_{aa})-(K_{ai}-\omega^2 M_{ai})(K_{ii}-\omega^2 M_{ii})^{-1}(K_{ia}-\omega^2 M_{ia})]X_a \qquad (9)$$

Выражение в квадратных скобках может быть интерпретировано как динамическая жесткость ячейки мембраны, приведенная к перемещениям ее контурных узлов. Имея в виду (3) и (4), можно с помощью (9) заменить систему, составленную из рамы и мембраны, некоторой новой рамой, в динамическом отношении эквивалентной исходной системе. Поставленная задача решается приближенно, если для (9) будет найдено разложение по ω^2, в котором можно сохранить слагаемые с ω^2 в нулевой и первой степенях и без большой погрешности пренебречь остальными. Тогда сможем записать

$$P_a\approx(\tilde K-\omega^2\tilde M)X_a \qquad (10)$$

Подставив, далее, (4) в (1) и учитывая (10), (7), придем к уравнению колебаний, где

$$M_{экв}\ddot X_p+K_{экв}X_p=0, \qquad (11)$$

в котором

$$K_{экв}=K_p+\sum_k\bar K_k\,, \qquad \bar K_k=H_k^T\tilde K_k H_k\,, \qquad (12)$$

$$M_{экв}=M_p+\sum_k\bar M_k\,, \qquad \bar M_k=H_k^T\tilde M_k H_k \qquad (13)$$

В проблеме отыскания представления (10) можно видеть два предельных случая. Первый - когда $\omega^2\|M_{ii}\|\cdot\|K_{ii}^{-1}\|<1$, второй - когда $\|K_{ii}\|\cdot\|M_{ii}^{-1}\|<\omega^2$. Здесь $\|K_{ii}\|$ - норма матрицы K_{ii} [1]. Заметим, что матрицы K_{ii} и M_{ii} всегда невырождены.

Рассмотрим сначала первый предельный случай. Известен следующий матричный ряд Тейлора [2] для разложения функции $(Y+Z)^{-1}$ в окрестности Y:

$$(Y+Z)^{-1}=Y^{-1}-Y^{-1}ZY^{-1}+Y^{-1}ZY^{-1}ZY^{-1}-\ldots, \qquad (14)$$

который равномерно сходится, если $\|Y^{-1}\|\cdot\|Z\|<1$. Воспользовавшись (I4), получим следующее разложение для обратной матрицы:

$$(K_{ii}-\omega^2 M_{ii})^{-1}=K_{ii}^{-1}+\omega^2 K_{ii}^{-1}M_{ii}K_{ii}^{-1}+\omega^4 K_{ii}^{-1}M_{ii}K_{ii}^{-1}M_{ii}K_{ii}^{-1}+\ldots \qquad (I5)$$

Подставляя (I5) в (9) и переходя затем к (I0), получим

$$\tilde{K}\approx K_{aa}-K_{ai}K_{ii}^{-1}K_{ia}, \qquad (I6)$$

$$\tilde{M}\approx M_{aa}+K_{ai}K_{ii}^{-1}M_{ii}K_{ii}^{-1}K_{ia}-M_{ai}K_{ii}^{-1}K_{ia}-K_{ai}K_{ii}^{-1}M_{ia}. \qquad (I7)$$

Если в (7) положить $\omega^2=0$, выразить X_i через X_a и, используя это выражение, выполнить приведение матриц масс и жесткостей из (2) к координатам X_a, то получим

$$\tilde{M}=\begin{bmatrix} E \\ -K_{ii}^{-1}K_{ia}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ai} \\ M_{ia} & M_{ii}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -K_{ii}^{-1}K_{ia}\end{bmatrix}, \qquad (I8)$$

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix} E \\ -K_{ii}^{-1}K_{ia}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ai} \\ K_{ia} & K_{ii}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -K_{ii}^{-1}K_{ia}\end{bmatrix}. \qquad (I9)$$

Эти формулы совпадают с выражениями (I6), (I7), которые, таким образом, представляют собой вариант статического приведения.

Во втором предельном случае вместо (I5) имеем разложение

$$(K_{ii}-\omega^2 M_{ii})^{-1}=-\frac{1}{\omega^2}M_{ii}^{-1}-\frac{1}{\omega^4}M_{ii}^{-1}K_{ii}M_{ii}^{-1}-$$
$$-\frac{1}{\omega^6}M_{ii}^{-1}K_{ii}M_{ii}^{-1}K_{ii}M_{ii}^{-1}-\ldots \qquad (20)$$

Это дает для компонентов (I0) следующие приближенные выражения с точностью до слагаемых, содержащих множитель $\frac{1}{\omega^2}$ в степени выше нулевой:

$$\tilde{K}=K_{aa}-K_{ai}M_{ii}^{-1}M_{ia}-M_{ai}M_{ii}^{-1}K_{ia}+$$
$$+M_{ai}M_{ii}^{-1}K_{ii}M_{ii}^{-1}M_{ia}, \qquad (2I)$$

$$\tilde{M}=M_{aa}-M_{ai}M_{ii}^{-1}M_{ia}. \qquad (22)$$

В промежуточных случаях, когда сходимость рядов (I5) или (20) слабая, ее можно улучшить с помощью подстановки

$$\omega^2=\omega_0^2+\Delta\omega^2, \qquad (23)$$

которая приводит к преобразованию

$$K - \omega^2 M = K - \omega_0^2 M - \Delta\omega^2 M = K^0 - \Delta\omega^2 M . \qquad (24)$$

Если $|K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii}| \neq 0$, то применение (I5) в этом случае дает вместо (I6), (I7) следующие зависимости:

$$\tilde{K}^0 = (K_{aa} - \omega_0^2 M_{aa}) - (K_{ai} - \omega_0^2 M_{ai})(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1}(K_{ia} - \omega_0^2 M_{ia}) \qquad (25)$$

$$\tilde{M} = M_{aa} - (K_{ai} - \omega_0^2 M_{ai})(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1} M_{ia} - M_{ai}(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1}(K_{ia} - \omega_0^2 M_{ia}) + (K_{ai} - \omega_0^2 M_{ai})(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1} M_{ii}(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1}(K_{ia} - \omega_0^2 M_{ia}). \qquad (26)$$

Далее, из (24)

$$\tilde{K} = \tilde{K}^0 + \omega_0^2 \tilde{M}$$

или с учетом (25), (26)

$$\tilde{K} = K_{aa} - (K_{ai} - \omega_0^2 M_{ai})(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1} K_{ia} - K_{ai}(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1}(K_{ia} - \omega_0^2 M_{ia}) + (K_{ai} - \omega_0^2 M_{ai})(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1} K_{ii}(K_{ii} - \omega_0^2 M_{ii})^{-1}(K_{ia} - \omega_0^2 M_{ia}). \qquad (27)$$

Преобразования (25)-(27) по существу обобщают процедуру, выражаемую формулами (I6) и (I7). Поэтому они могут быть условно названы псевдостатическим приведением. Эти преобразования имеют важное значение, так как они позволяют построить итерационный алгоритм решения системы (I)-(2) с использованием (I2), (I3).

Алгоритм расчета колебаний рамы с мембраной

I. Строятся матрицы жесткости и масс рамы.

2. Строятся матрицы жесткости и масс ячеек мембраны.

3. Оценивается спектральный диапазон мембраны

$$\lambda^2_{min} \geqslant \inf_{1 \le k \le n} \frac{1}{\|K^{-1}_{ii_k}\| \cdot \|M_{ii_k}\|}, \qquad \lambda^2_{max} \le \sup_{1 \le k \le n} \|M^{-1}_{ii_k}\| \cdot \|K_{ii_k}\|.$$

4. Оценивается спектральный диапазон рамы

$$\omega^2_{p_{min}} \geqslant \frac{1}{\|K_p^{-1}\| \cdot \|M_p\|}, \qquad \omega^2_{p_{max}} \le \|M_p^{-1}\| \cdot \|K_p\|.$$

5. Сравниваются границы спектров рамы и мембраны, определяются области применимости разложений (I5), (20).

6. По ориентировочному значению собственной частоты, для которой нужно рассчитать форму колебаний системы, выбирается смещение ω_0 (например, если нужно найти несколько низших тонов колебаний, то $\omega_0 = \min(\lambda_{min}, \omega_{p\,min})$).

7. Строятся матрицы жесткости и масс $\tilde{K}_K$, $\tilde{M}_K$ суперэлементов по формулам (26), (27).

8. Формируются матрицы жесткости и масс $K_{экв}$ и $M_{экв}$ системы по (I2), (I3).

9. Находится собственная частота ω_1 системы, ближайшая к ω_0.

I0. Сравнивается ω_1 и ω_0; если $|\omega_1 - \omega_0| > \varepsilon$, где ε – заданная точность определения ω, то следует положить $\omega_0 = \omega_1$ и перейти к п. 7; если $|\omega_1 - \omega_0| \le \varepsilon$, то можно перейти к расчету следующего тона или прекратить расчет. Расчет очередного тона начинается с п. 6. Если при этом применяется ортогонализация форм, можно принять $\omega_0 = \omega_1$, в противном случае нужна новая оценка ω_0.

Формулы (I6), (I7) можно использовать без итераций, если частота ω удовлетворяет неравенству $\omega^2 \ll \lambda^2_{min}$. Аналогично, (2I) и (22) можно использовать, если $\omega^2 \gg \lambda^2_{max}$. Заметим еще, что сетка элементов на мембране может быть значительно мельче, чем на раме, что открывает дополнительные возможности увеличения точности метода.

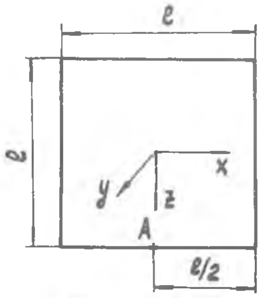

Рис. I

Предложенным методом выполнен расчет квадратной рамы, жестко закрепленной в точке A (рис. I), с натянутой на нее мембраной при следующих исходных данных: жесткость стержней на изгиб $EJ_y = EJ_x (EJ_z) =$ I0 кгм^2, на кручение $GJ_{кр}$ =8 кгм^2, на растяжение EF = 4·I0^{5}кг, длина стержней ℓ = 2 м, их погонная масса m =0,Iкгсек^{2}м$^{-2}$; погонная жесткость мембраны на растяжение Eh = I0^4 кгм$^{-I}$, на сдвиг Gh = 4·I0^3 кгм$^{-I}$, поверхностная плотность мембраны μ =0,2 кгсек^{2}м$^{-3}$; ее натяжение $T_x = T_z$ = I0 кгм$^{-I}$.

Разбиение рамы и мембраны на конечные элементы и принятая нумерация узлов показаны на рис. 2.

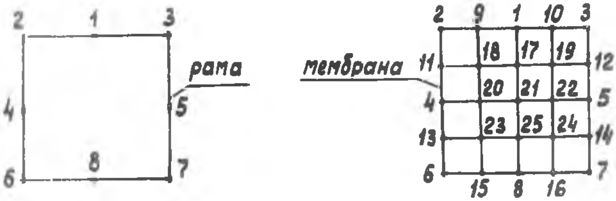

Рис. 2

Определены несколько первых собственных частот и соответствующих им форм колебаний системы с использованием статического приведения по (I6), (I7) (расчет А) и с использованием приведения по (26), (27) и итераций по частоте (расчет Б).

Для оценки точности предложенного метода те же характеристики определены прямым методом (расчет В), сущность которого заключается в следующем. Уравнения (I), (5) и (6) с помощью (3) и (4) преобразуются к виду

$$(K - \omega^2 M) X = 0, \qquad (28)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} M_p + H^T M_{aa} H & H^T M_{ai} \\ M_{ia} H & M_{ii} \end{bmatrix}, \qquad (29)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_p + H^T K_{aa} H & H^T K_{ai} \\ K_{ia} H & K_{ii} \end{bmatrix}, \qquad (30)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_p \\ X_i \end{bmatrix}. \qquad (3I)$$

Этот метод дает, в принципе, точное решение системы (I), (2) и поэтому может быть использован для оценки точности предыдущих решений.

Полученные в расчетах собственные частоты сведены в таблицу I. Звездочками отмечены частоты, соответствующие колебаниям в плоскости рамы.

Таблица I

Расчетный случай	А	Б	В	Г	Д
ω_1^2	I2.7I	I2.56	I2.56	7.77I	259.67
ω_2^2	43.59	43.23	43.23	I6.I7*	729.83
ω_3^2	58.30*	58.29*	58.29*	38.77	729.83
ω_4^2	I87.36	I70.25	I70.25	I44.98*	I200
ω_5^2	308.82	296.55	296.55	293.89	I7I4.3
ω_6^2	999.6	969.59	386.2	328.I*	I7I4.3
ω_7^2	I748.8	I785.2	826.7	5I3.56	2I84.4
ω_8^2	I885.8	29I8.3*	872.8	II9I.9*	2I84.4
ω_9^2	2932.9*	93I9.I*	969.59	I526.2	3I68.9
ω_{10}^2	9429.9*	-	I322.4	2052*	-

Сравнение данных расчетов показывает, что в области низких частот (первые три тона) расчеты А, Б и В дают практически совпадающие результаты. В области средних частот (4-й, 5-й тон) начинает уже сказываться влияние волновых движений мембраны, вследствие чего результаты расчета А несколько отличаются от точного значения. Далее этот метод начинает давать пропуск тонов. Результаты расчета Б во всем диапазоне частот полностью согласуются с точным решением. Имеющие место пропуски тонов обусловлены тем, что начальные смещения ω_0 выбирались из ряда частот, полученных статическим приведением (расчет А). При ином выборе смещений пропуск тонов можно избежать. Для сопоставления в таблице I приведены также частотные характеристики изолированной рамы (расчет Г) и мембраны, натянутой на жесткий контур (расчет Д).

В заключение отметим, что прямой метод требует значительно большего объема памяти и машинного времени, чем предложенный в настоящей работе. Так, при вычислении на ЭВМ БЭСМ-6 расчет В потребовал 70 минут машинного времени, тогда как на расчеты А, Б, Г и Д вместе взятые было затрачено 77 минут.

Литература

I. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., "Наука", I974.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. "Наука", I967.

3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. М., "Наука", I970.

4. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. "Судостроение", I974.

5. Филиппов Ю.И. Расчет колебаний рамы с натянутой на нее тяжелой мембраной. В настоящем сборнике.