ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 539.3

В.Н.Паймушин, В.А.Фирсов

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТАТИКИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ, ПОЛОГИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ОТСЧЕТА

Под оболочкой сложной формы будем понимать такую оболочку, срединную поверхность которой не представляется возможным описать аналитическим уравнением. Поэтому при исследовании напряженно-деформированного состояния этих оболочек в первую очередь возникает задача параметризации их срединной поверхности, включающая:
а) выбор гауссовых координат и семейства координатных линий;
б) определение метрики и кривизн координатных линий срединной поверхности оболочки.

В работах [1, 2] предложен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния класса оболочек сложной формы, пологих относительно поверхности отсчета, согласно которому отмеченная выше задача решается отображением срединной поверхности σ на поверхность отсчета σ_0, причем последняя может быть отнесена как к линиям кривизны σ_0 [1], так и к произвольным криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2 [2].

В данной работе на основе этого подхода рассмотрены вопросы численного решения задач статики оболочек сложной формы, пологих относительно поверхности отсчета.

Как отмечено в [2], исследование напряженно-деформированного состояния оболочек численными методами анализа удобно проводить на основе соотношений теории тонких оболочек типа Тимошенко, базирующейся на гипотезе прямой линии. Компоненты деформации оболочки по этой теории равны [3]:

$$\varepsilon^{z}_{ik} = \varepsilon_{ik} + z\,\varkappa_{ik}\,, \quad \varepsilon^{z}_{i3} = \varepsilon_{i3}\,, \quad \varepsilon^{z}_{33} = 0\,, \tag{I}$$

где согласно [2]

$$2\varepsilon_{ik} = e_{ik} + e_{ki}\,, \quad 2\varepsilon_{i3} = \omega_i + \psi_i\,, \quad 2\varkappa_{ik} = \Omega_{ik} + \Omega_{ki}\,;$$

$$e_{11} = A_1^{-1} u_{1,1} + u_2 A_{1,2}(A_1 A_2)^{-1} + K_{11} W\,, \quad e_{12} = A_1^{-1} u_{2,1} -$$

$$- u_1 A_{1,2}(A_1 A_2)^{-1} + K_{12} W\,, \quad \omega_1 = A_1^{-1} W_{,1} - K_{11} u_1 - K_{12} u_2\,, \quad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}$$

$$\Omega_{11} = A_1^{-1} \psi_{1,1} + \psi_2 A_{1,2}(A_1 A_2)^{-1}\,, \quad \Omega_{12} = A_1^{-1} \psi_{2,1} - \psi_1 A_{1,2}(A_1 A_2)^{-1} \tag{2}$$

Здесь K_{ij} и A_i – кривизны и кручение координатных линий $\beta_i \in \sigma$, являющихся образом координатных линий $\alpha_i \in \sigma_0$, а также параметры Ляме на σ, определяемые по формулам работы [2]:

$$A_i = A_i^0 \theta_i\,, \quad K_{11} = \frac{K_{11}^0}{\theta_1} - \frac{y_{1,1}}{A_1} - \frac{y_2 A_{1,2}^0}{A_1 A_2^0}\,, \quad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}$$

$$K_{12} = \frac{K_{12}^0}{\theta_1} + \frac{y_1 A_{1,2}^0}{A_1 A_2^0} - \frac{y_{2,1}}{A_1}\,, \tag{3}$$

где

$$\theta_i = 1 + H K_{ii}^0\,, \quad y_1 = \beta_1 - \eta_1 \beta_2\,, \quad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}$$

$$\beta_i = H_{,i} / A_i^0 \theta_i\,, \quad \eta_i = H K_{12}^0 / \theta_i\,.$$

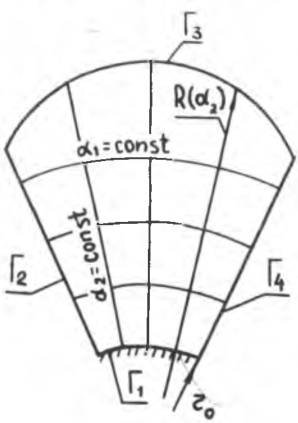

Рис. I

Рассмотрим класс оболочек, проекция контурной линии которых на поверхности отсчета σ_0 состоит из кусков Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 (рис. I). Предполагается, что линии Γ_1 и Γ_2, Γ_4 совпадают с координатными линиями $\alpha_1 = const = r_0$ и $\alpha_2 = \varphi_0, \varphi_n$ соответственно, а линия Γ_3 задана уравнением $R = R(\alpha_2)$. В этом случае вместо гауссовых координат α_1 и α_2 удобнее ввести новые независимые переменные ξ, θ по формулам

$$\alpha_1 = a + b\xi, \qquad \alpha_2 = \theta. \tag{4}$$

Для определения коэффициентов a и b составим уравнения: при $\alpha_1 = r_0$ $\xi = r_0$; при $\alpha_1 = R(\alpha_2) = R(\theta)$ $\xi = R_m$, где $R_m = \max R(\alpha_2)$, $\varphi_0 \le \alpha_2 \le \varphi_n$.

Отсюда

$$a = R(\theta) - R_m \frac{R(\theta) - r_0}{R_m - r_0}, \qquad b = \frac{R(\theta) - r_0}{R_m - r_0}.$$

В случае, когда контур оболочки свободен от внешних усилий, дифференциальные уравнения равновесия, приведенные в работе [2], с учетом соотношений (4) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{r_0}^{R_m}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_n}\Big\{\frac{A_2}{b} T_{11}\,\delta u_{1,1} + A_1 T_{12}\,\delta u_{1,2} - A_1 F T_{12}\,\delta u_{1,1} + [A_{2,1} T_{22} - A_{1,2} T_{12} - \\
&\qquad - A_1 A_2 (k_{11} T_{13} + k_{12} T_{23} + X_1)]\,\delta u_1\Big\}\, b\, d\xi\, d\theta = 0, \\
&\int\limits_{r_0}^{R_m}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_n}\Big\{\frac{A_2}{b} T_{12}\,\delta u_{2,1} + A_1 T_{22}\,\delta u_{2,2} - A_1 F T_{22}\,\delta u_{2,1} + [A_{1,2} T_{11} - A_{2,1} T_{12} - \\
&\qquad - A_1 A_2 (k_{12} T_{13} + k_{22} T_{23} + X_2)]\,\delta u_2\Big\}\, b\, d\xi\, d\theta = 0, \\
&\int\limits_{r_0}^{R_m}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_n}\Big\{\frac{A_2}{b} T_{13}\,\delta w_{,1} + A_1 T_{23}\,\delta w_{,2} - A_1 F T_{23}\,\delta w_{,1} + A_1 A_2 (k_{11} T_{11} + \\
&\qquad + k_{22} T_{22} + 2k_{12} T_{12} - X_3)\,\delta w\Big\}\, b\, d\xi\, d\theta = 0, \\
&\int\limits_{r_0}^{R_m}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_n}\Big\{\frac{A_2}{b} M_{11}\,\delta\psi_{1,1} + A_1 M_{12}\,\delta\psi_{1,2} - A_1 F M_{12}\,\delta\psi_{1,1} + [A_{2,1} M_{22} - \\
&\qquad - A_{1,2} M_{12} + A_1 A_2 (T_{13} - M_1)]\,\delta\psi_1\Big\}\, b\, d\xi\, d\theta = 0, \\
&\int\limits_{r_0}^{R_m}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_n}\Big\{\frac{A_2}{b} M_{12}\,\delta\psi_{2,1} + A_1 M_{22}\,\delta\psi_{2,2} - A_1 F M_{22}\,\delta\psi_{2,1} + [A_{1,2} M_{11} - \\
&\qquad - A_{2,1} M_{12} + A_1 A_2 (T_{23} - M_2)]\,\delta\psi_2\Big\}\, b\, d\xi\, d\theta = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $T_{i,j}$, $M_{i,j}$ – физические компоненты тензоров внутренних усилий и моментов, связанные с деформациями через соотношения упругости

$$T_{ij} = B[(1-\nu)\varepsilon_{ij} + \nu\delta_{ij}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})], \quad T_{i3} = B_c\,\varepsilon_{i3},$$
$$M_{ij} = D[(1-\nu)\text{æ}_{ij} + \nu\delta_{ij}(\text{æ}_{11}+\text{æ}_{22})]; \qquad (6)$$

$B = Et/(1-\nu^2)$, $D = Bt^2/2$, $B_c = K_c G t$ – жесткости на растяжение, изгиб и сдвиг; E, G, ν – модуль упругости, сдвига и коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера, K_c – коэффициент сдвига[3], F – коэффициент, определяемый по формуле $F=[R(\theta)-z_0]^{-1}(\xi-z_0)dR/d\theta$.

Поставим задачу определения напряженно-деформированного состояния консольно закрепленных оболочек, являющихся расчетной схемой различного рода лопастных аппаратов (лопасти гребных винтов, лопатки турбин), у которых кромки оболочки Γ_2, Γ_3, Γ_4 являются свободными, а кромка Γ_1 – защемленной.

Для данной краевой задачи необходимо удовлетворить следующим граничным условиям:

силовым на кромках $\alpha_2 = \theta_0, \theta_n$: $T_{22} = T_{12} = T_{23} = M_{22} = M_{12} = 0$, (7)

геометрическим на кромке $\xi = z_0$: $u_i = w = \psi_i = 0$. (8)

Для отыскания решения уравнений (5) при граничных условиях (7) и (8) применим метод прямых, для чего разделим оболочку n количеством линий ($k = \overline{1,n}$) в направлении θ и введем дополнительно две внеконтурные прямые $k = 0$, $n+1$.

Заменим в (7) производные по θ центральными конечно-разностными выражениями, а интегралы в том же направлении – формулами численного интегрирования. Интегрируя затем полученные выражения по частям и учитывая произвольность возможных перемещений δu_i, δw, $\delta\psi_i$, приходим к системе $5\times n$ обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^k}{B_k}T_{11}^k\right) - \frac{d}{d\xi}\left(A_1^k F_k T_{12}^k\right) - A_1^k T_{12}^k d_{k,k} - A_{2,1}^k T_{22}^k + A_{1,2}^k T_{1,2}^k + A_1^k A_2^k (K_{11}^k T_{13}^k +$$
$$+ K_{12}^k T_{23}^k + X_1^k) - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} A_1^{k-1} T_{12}^{k-1} d_{k-1,k} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} A_1^{k+1} T_{12}^{k+1} d_{k+1,k} = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^k}{B_k}T_{12}^k\right) - \frac{d}{d\xi}\left(A_1^k F_k T_{22}^k\right) - A_1^k T_{22}^k d_{k,k} - A_{1,2}^k T_{11}^k + A_{2,1}^k T_{12}^k + A_1^k A_2^k (K_{12}^k T_{13}^k +$$

$$+K_{22}^{K}T_{23}^{K}+X_{2}^{K})-\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_K}A_1^{K-1}T_{22}^{K-1}d_{K-1,K}-\frac{\alpha_{K+1}}{\alpha_K}A_1^{K+1}T_{22}^{K+1}d_{K+1,K}=0,\ (K=\overline{1,n})$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^K}{B_K}T_{13}^K\right)-\frac{d}{d\xi}(A_1^KF_KT_{23}^K)-A_1^KT_{23}^Kd_{K,K}-A_1^KA_2^K(K_{11}^KT_{11}^K+K_{22}^KT_{22}^K+$$

$$+2K_{12}^KT_{12}^K-X_3^K)-\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_K}A_1^{K-1}T_{23}^{K-1}d_{K-1,K}-\frac{\alpha_{K+1}}{\alpha_K}A_1^{K+1}T_{23}^{K+1}d_{K+1,K}=0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^K}{B_K}M_{11}^K\right)-\frac{d}{d\xi}(A_1^KF_KM_{12}^K)-A_1^KM_{12}^Kd_{K,K}-A_{2,1}^KM_{22}^K+A_{1,2}^KM_{12}^K-$$

$$-A_1^KA_2^K(T_{13}^K-M_1^K)-\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_K}A_1^{K-1}M_{12}^{K-1}d_{K-1,K}-\frac{\alpha_{K+1}}{\alpha_K}A_1^{K+1}M_{12}^{K+1}d_{K+1,K}=0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^K}{B_K}M_{12}^K\right)-\frac{d}{d\xi}(A_1^KF_KM_{22}^K)-A_1^KM_{22}^Kd_{K,K}-A_{1,2}^KM_{11}^K+A_{2,1}^KM_{12}^K-$$

$$A_1^KA_2^K(T_{23}^K-M_2^K)-\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_K}A_1^{K-1}M_{22}^{K-1}d_{K-1,K}-\frac{\alpha_{K+1}}{\alpha_K}A_1^{K+1}M_{22}^{K+1}d_{K+1,K}=0 \qquad (9)$$

и естественным граничным условиям при $\xi = R_m$

$$\frac{A_2^K}{B_K}T_{11}^K-A_1^KF_KT_{12}^K=0,\quad \frac{A_2^K}{B_K}T_{12}^K-A_1^KF_KT_{22}^K=0,\quad \frac{A_2^K}{B_K}T_{13}^K-A_1^KF_KT_{23}^K=0,$$

$$\frac{A_2^K}{B_K}M_{11}^K-A_1^KF_KM_{12}^K=0,\qquad \frac{A_2^K}{B_K}M_{12}^K-A_1^KF_KM_{22}^K=0,\quad K=\overline{1,n}, \qquad (10)$$

где $d_{K,K}^{i}$, α_K – весовые коэффициенты формул численного дифференцирования и интегрирования.

На крайних прямых $K=1,n$ $(\theta=\theta_0,\theta_n)$ необходимо удовлетворить силовым граничным условиям (7), которые после замены производных по θ центральными разностными операторами примут вид

$$\frac{1}{A_2^i}\,\frac{u_2^{i+1}-u_2^{i-1}}{2h}-\frac{F_i}{A_2^i}u_{2,1}^i+\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{2,1}^iu_1^i+K_{22}^iW^i+\nu\left(\frac{1}{A_1^iB_i}u_{1,1}^i+\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{1,2}^iu_2^i+K_{11}^iW^i\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_1^iB_i}u_{2,1}^i-\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{1,2}^iu_1^i+K_{12}^iW^i+\frac{1}{A_2^i}\,\frac{u_1^{i+1}-u_1^{i-1}}{2h}-\frac{F_i}{A_2^i}u_{1,1}^i-\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{2,1}^iu_2^i+K_{12}^iW^i=0,$$

$$\psi_2^i+\frac{1}{A_2^i}\,\frac{W^{i+1}-W^{i-1}}{2h}-\frac{F_i}{A_2^i}W_{,1}^i-K_{22}^iu_2^i-K_{12}^iu_1^i=0,\qquad (i=1,n)$$

$$\frac{1}{A_2^i}\frac{\psi_2^{i+1}-\psi_2^{i-1}}{2h}-\frac{F_i}{A_2^i}\psi_{2,1}^i+\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{2,1}^i\psi_1^i+\nu\left(\frac{1}{A_1^iB_i}\psi_{1,1}^i+\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{1,2}^i\psi_2^i\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_1^iB_i}\psi_{2,1}^i-\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{1,2}^i\psi_1^i+\frac{1}{A_2^i}\frac{\psi_1^{i+1}-\psi_1^{i-1}}{2h}-\frac{F_i}{A_2^i}\psi_{1,1}^i-\frac{1}{A_1^iA_2^i}A_{2,1}^i\psi_2^i=0, \qquad (11)$$

где h – шаг расчетных прямых по θ .

Выразим из соотношений (11) функции, относящиеся к внеконтурным прямым $k=0,\ n+1$, и подставим их в уравнения равновесия (9) и граничные условия (10). При этом последние, например, для $k=1$ в усилиях запишутся в виде

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^{(1)}}{B_1}T_{11}^{(1)}\right)+A_1^{(1)}A_2^{(1)}\left(k_{11}^{(1)}T_{13}^{(1)}+X_1^{(1)}\right)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_1^{(2)}T_{12}^{(2)}d_{2,1}=0,$$

$$A_{1,2}^{(1)}T_{11}^{(1)}-A_1^{(1)}A_2^{(1)}\left(k_{12}^{(1)}T_{13}^{(1)}+X_2^{(1)}\right)+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_1^{(2)}T_{22}^{(2)}d_{2,1}=0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^{(1)}}{B_1}T_{13}^{(1)}\right)-A_1^{(1)}A_2^{(1)}\left(k_{11}^{(1)}T_{11}^{(1)}-X_3^{(1)}\right)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_1^{(2)}T_{23}^{(2)}d_{2,1}=0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_2^{(1)}}{B_1}M_{11}^{(1)}\right)-A_1^{(1)}A_2^{(1)}\left(T_{13}^{(1)}-M_1^{(1)}\right)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_1^{(2)}M_{12}^{(2)}d_{2,1}=0.$$

$$A_{1,2}^{(1)}M_{11}^{(1)}-A_1^{(1)}A_2^{(1)}M_{\cdot 2}^{(1)}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_1^{(2)}M_{22}^{(2)}d_{2,1}=0; \qquad (12)$$

$$T_{11}^{(1)}=M_{11}^{(1)}=T_{13}^{(1)}=0 \quad \text{при} \quad \xi=R_m. \qquad (13)$$

Уравнения равновесия для $k=2,\ n-1$ после подстановки (11) в (9) будут иметь вид, подобный (9) и отличающийся от последних только отсутствием членов

$$M_{22}^{(i)}=T_{22}^{(i)}=M_{12}^{(i)}=T_{12}^{(i)}=T_{23}^{(i)}=0 \qquad (i=1,n).$$

Для отыскания решения преобразованной таким образом системы обыкновенных дифференциальных уравнений применим устойчивый численный метод конечных сумм с использованием интегрирующих матриц [4], для чего на отрезке $r_0\le\xi\le R_m$ выберем m расчетных точек. Для использования этого метода в силу условий (8) запишем очевидные интегральные соотношения

$$u_i^{(k)}=\int_{z_0}^{\xi}\frac{du_i^{(k)}}{d\xi}d\xi,\quad W^{(k)}=\int_{z_0}^{\xi}\frac{dW^{(k)}}{d\xi}d\xi,\quad \psi_i^{(k)}=\int_{z_0}^{\xi}\frac{d\psi_i^{(k)}}{d\xi}d\xi\quad (k=\overline{1,n}). \tag{I4}$$

Интегрируя уравнения равновесия (9), (I2), удовлетворяя при этом граничным условиям (I0) и (I3), используя затем соотношения упругости и выражения (I4), после некоторых преобразований приходим к системе разностных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно $du_1^{(k)}/d\xi$, $dW^{(k)}/d\xi$, $d\psi_1^{(k)}/d\xi$, $du_2^{(i)}/d\xi$, $d\psi_2^{(i)}/d\xi$, u_2^{s} и ψ_2^{s}, где $k=\overline{1,n}$; $i=\overline{2,n-1}$; $s=1,n$.

Заменяя в этой системе интегралы конечными суммами с помощью интегрирующих матриц [4], приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1X_1+D_1X_2+E_1X_3=-F_1,\\
&B_2X_1+C_2X_2+D_2X_3+E_2X_4=-F_2,\\
&A_jX_{j-2}+B_jX_{j-1}+C_jX_j+D_jX_{j+1}+E_jX_{j+2}=-F_j\quad (j=\overline{3,n-2})\\
&A_{n-1}X_{n-3}+B_{n-1}X_{n-2}+C_{n-1}X_{n-1}+D_{n-1}X_n=-F_{n-1},\\
&A_nX_{n-2}+B_nX_{n-1}+C_nX_n=-F_n,
\end{aligned} \tag{I5}$$

где A_j , B_j , C_j – некоторые квадратные матрицы порядка $5\times m$ (m – число расчетных сечений по длине оболочки); F_j – векторы порядка $5\times m$ правых частей системы; X_j – векторы неизвестных порядка $5\times m$

$$\begin{aligned}
X_j=\{&\{u_{11}^{(j)'},u_{12}^{(j)'},\dots u_{1m}^{(j)'}\},\{u_{21}^{(j)'},u_{22}^{(j)'},\dots u_{2m}^{(j)'}\},\{W_1^{(j)'},W_2^{(j)'},\dots W_m^{(j)'}\},\\
&\{\psi_{11}^{(j)'},\psi_{12}^{(j)'},\dots \psi_{1m}^{(j)'}\},\{\psi_{21}^{(j)'},\psi_{22}^{(j)'},\dots \psi_{2m}^{(j)'}\}\}\quad j=\overline{2,n-1}\\
X_j=\{&\{u_{11}^{(j)'},u_{12}^{(j)'},\dots u_{1m}^{(j)'}\},\{u_{21}^{(j)},u_{22}^{(j)},\dots u_{2m}^{(j)}\},\{W_1^{(j)'},W_2^{(j)'},\dots W_m^{(j)'}\},\\
&\{\psi_{11}^{(j)'},\psi_{12}^{(j)'},\dots \psi_{1m}^{(j)'}\},\{\psi_{21}^{(j)},\psi_{22}^{(j)},\dots \psi_{2m}^{(j)}\}\}\quad j=1,n
\end{aligned} \tag{I6}$$

Здесь верхний штрих обозначает производную по переменной ξ . Можно показать, что матрица системы уравнений (I5) является невырожденной. Решение этой системы можно получить методом матричной прогонки [5].

Изложенный метод расчета реализован на ЭВМ и применен к исследованию напряженно-деформированного состояния ряда реальных конструкций. В частности, были проведены расчеты элементов лопастных аппаратов, являющихся оболочками сложной формы, в большинстве случаев пологими относительно прямого геликоида. Исследования показали, что напряженно-деформированное состояние такого класса оболочек является в основном изгибным, т.е. мембранные напряжения оказываются на порядок ниже изгибных.

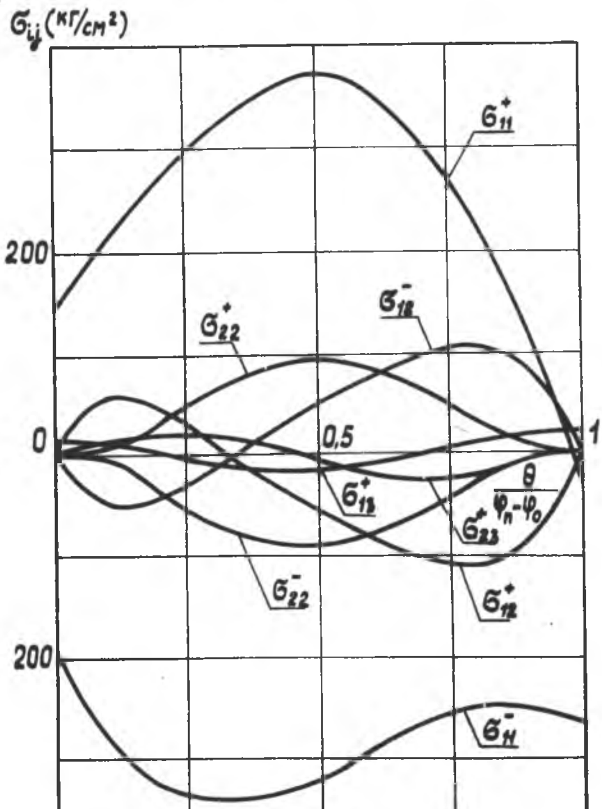

Рис. 2

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведены эпюры распределения по хорде напряжений $\sigma_{ij}^{+} = \sigma_{ij}(z = t/2)$, $\sigma_{ij}^{-} = \sigma_{ij}(z = -t/2)$ (i = I,2; j = I,3) на засасывающей и нагнетающей поверхностях реальной лопасти гребного винта. Как и следовало ожидать, наибольшими по модулю оказались компоненты σ_{11} , а поперечные касательные напряжения σ_{i3} на порядок ниже по сравнению с основными компонентами и существенно не влияют на напряженно-деформированное состояние рассматриваемого класса оболочек.

Литература

I. Паймушин В.Н. Нелинейная теория тонких оболочек, пологих относительно поверхности отсчета. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1976.

2. Паймушин В.Н., Фирсов В.А. Об одном классе тонких оболочек сложной формы, пологих относительно поверхности отсчета с "Ненулевым кручением". - В сб.: Вопросы прочности авиационных конструкций, вып. 2, Казань, 1977.

3. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, Изд-во Казанского университета, 1975.

4. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. ИВУЗ, "Авиационная техника", № 3, 1966.

5. Снигирев В.Ф., Паймушин В.Н., Галимов Н.К. О возможности использования приближенных уравнений при расчете консольных трехслойных пластин. - В сб.: Труды семинара по теории оболочек, вып. IУ, Казанский физ.-техн. институт АН СССР, 1974.