

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ  
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
Межвузовский сборник, вып. 3, 1977

---

УДК 624.074.4

В.Я. Логунов, Х.С. Хазанов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСОЛЬНОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ  
ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Рассматривается консольная цилиндрическая оболочка, подкрепленная по свободному краю шпангоутом переменного сечения. Предполагается, что шпангоут расположен симметрично относительно срединной поверхности оболочки. К нему могут быть приложены сосредоточенные силы произвольного характера. Для случая подкрепления оболочки шпангоутом постоянного сечения подобная задача решалась аналитическими методами рядом авторов [1, 2, 3, 4]. Однако с точки зрения передачи локальных нагрузок при минимальном весе конструкции рационально использовать шпангоут переменного сечения. Аналитическое решение такой задачи со шпангоутом переменной жесткости было предложено в [5, 6]. В работе [5] оболочка считалась полубезмоментной, шпангоут принимался "массивным", нерастяжимым и "абсолютно податливым" из своей плоскости. В [6] оболочка полагалась безмоментной, кольцо — также нерастяжимым. Подобные допущения вряд ли можно считать достаточно обоснованными.

В настоящей статье задача решается с применением метода конечных элементов. Шпангоут предполагается состоящим из элементов, в пределах каждого из которых площадь поперечного сечения постоянна. Оболочка представляется одним конечным элементом [7], имеющим по свободному краю узлы в точках сопряжения с элементами шпангоута. Для построения матрицы жесткости оболочки используется аналитическое решение задачи.

Если следовать классической модели метода конечных элемен-

тон, то оболочку пужно также расчленить на элементы, для построения матриц жесткости которых поле перемещений аппроксимируется приближенными зависимостями. В этом случае хорошая сходимость

результатов будет обеспечена при достаточно мелком членении оболочки, что приводит к весьма высокому порядку разрешающей системы уравнений относительно узловых перемещений.

Предлагаемый в [ 7 ] метод позволяет существенно сократить порядок системы уравнений и не вносит в расчеты дополнительных погрешностей, связанных с введением приближенных аппроксимирующих функций.

На рис. I показан элемент шпангоута с принятыми обозначениями для узловых перемещений.

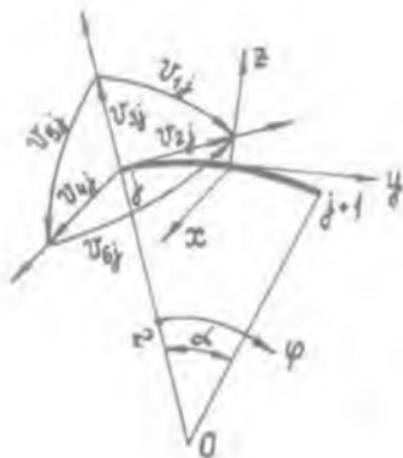


Рис. I

Введем для элемента шпангоута между узлами  $j$  и  $j + 1$  следующие блочные матрицы узловых сил и перемещений:

$$\bar{S}_e = \begin{bmatrix} \bar{S}_j \\ \bar{S}_{j+1} \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_e = \begin{bmatrix} \bar{v}_j \\ \bar{v}_{j+1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где\*)

$$\bar{S}_j = \{ \bar{S}_{1j} \bar{S}_{2j} \bar{S}_{3j} \bar{S}_{4j} \bar{S}_{5j} \bar{S}_{6j} \},$$

$$\bar{v}_j = \{ v_{1j} v_{2j} v_{3j} v_{4j} v_{5j} v_{6j} \}. \quad (2)$$

Представим матрицу жесткости элемента также в блочном виде:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \bar{K}_{j,j} & \bar{K}_{j,j+1} \\ \bar{K}_{j+1,j} & \bar{K}_{j+1,j+1} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

\*) Здесь и в дальнейшем матрицы-столбцы будем располагать в строку и заключать их в фигурные скобки.

Матрица жесткости элемента тонкого растяжимого кривого бруса симметричного сечения, полученная с использованием аналитического решения задачи о его напряженно-деформированном состоянии, приведена в работе [8]. Разбив эту матрицу на блоки размером  $6 \times 6$ , получим подматрицы, входящие в (3).

Если к шпангоуту приложены симметричные или обратно симметричные нагрузки, то можно ограничиться рассмотрением полукольца. Пусть полукольцо разбито на  $t$  конечных элементов. Представим его как подконструкцию системы. Матрица жесткости полукольца в блочной форме будет иметь порядок  $(t + 1) \times (t + 1)$ :

$$\bar{K} = [\bar{K}_{jm}] \quad (j, m = 0, 1, 2, \dots, t).$$

Типовой элемент этой матрицы имеет структуру

$$\bar{K}_j = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1j, 1m} & \bar{K}_{1j, 2m} & \dots & \bar{K}_{1j, 6m} \\ \bar{K}_{2j, 1m} & \bar{K}_{2j, 2m} & \dots & \bar{K}_{2j, 6m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_{6j, 1m} & \bar{K}_{6j, 2m} & \dots & \bar{K}_{6j, 6m} \end{bmatrix}$$

Подматрицы  $\bar{K}_{jm}$  отличны от нуля только при  $m = j - 1$ ,  $j$ ,  $j + 1$ . При  $m = j$  производится суммирование одноименных коэффициентов жесткостей двух соседних элементов.

Перейдем к рассмотрению оболочки, остановившись на основных идеях работы [7]. Обозначим через  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  погонную касательную, обобщенную перерезывающую и растягивающую силы, а через  $P_5$  - погонный изгибающий момент в торцовом сечении оболочки. Через  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  и  $U_5$  обозначим перемещения в направлении соответствующих усилий. Пусть для оболочки известно аналитическое решение в тригонометрических рядах относительно окружной координаты. В этом случае силы и перемещения в торцовом сечении представляются также в виде тригонометрических рядов. Ограничимся рассмотрением напряженно-деформированного состояния, симметричного относительно диаметральной плоскости  $\psi = 0$ , и перейдем от рядов к конечным суммам:

$$P_i = \sum_{n=1}^t P_{in} \sin n\psi, \quad P_i = \sum_{n=1}^t P_{in} \cos n\psi \quad (i = 3, 4, 5), \quad (6)$$

$$U_i = \sum_{n=1}^t U_{in} \sin n\psi, \quad U_i = \sum_{n=1}^t U_{in} \cos n\psi \quad (i = 3, 4, 5), \quad (7)$$

$l_n = \frac{1}{2}$  при  $n = 0$ ,  $l_n = 1$  при  $n \neq 0$ .

Введем матрицы-столбцы

$$P = \{P_2 P_3 P_4 P_5\}, \quad u = \{u_2 u_3 u_4 u_5\}. \quad (8)$$

Здесь

$$P_i = \{P_{i0} P_{i1} P_{i2} \dots P_{it}\}, \quad (i = 3, 4, 5)$$

$$u_i = \{u_{i0} u_{i1} u_{i2} \dots u_{it}\} \quad (i = 3, 4, 5) \quad (9)$$

матрицы-столбцы, составленные из коэффициентов рядов (6) и (7).

Между коэффициентами рядов (6), с одной стороны, и коэффициентами рядов (7), с другой, имеется однозначное соответствие, которое в самом общем виде можно записать

$$P = c u. \quad (10)$$

Типовой элемент матрицы  $C$ , например  $C_{im \times kn}$ , представляет собой амплитудное значение силы  $P_{im}$ , вычисленное в предположении, что  $U_{kn} = I$ , а все остальные коэффициенты рядов для смещений (7) равны нулю.

Обозначим через  $v_2, v_3, v_4$  линейные смещения узла  $j$  лочки в направлении осей  $y, z, x$ , а через  $v_{5j}$  - угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки относительно оси  $y$  (рис. 2). Составим матрицу

$$v = \{v_2 v_3 v_4 v_5\}, \quad (11)$$

где

$$v_i = \{v_{i0} v_{i1} v_{i2} \dots v_{ij} \dots v_{it}\} \quad (i = 2, 3, 4, 5).$$

Тогда можно записать  $v = \alpha u$ , где  $\alpha$  - числовая матрица, элементы которой выражаются через угловые координаты узлов. Так как матрица  $\alpha$  неособенная, то имеем

$$u = \alpha^{-1} v = \beta v. \quad (12)$$

Как показано в [7], матрица жесткости оболочки, устанавливающая связь между узловыми силами  $S$  и узловыми перемещениями  $v$ , может быть подсчитана по формуле

$$K = \frac{\pi R}{2} \beta^T c \beta.$$

Построение матрицы жесткости оболочки сводится, таким образом, к элементарным операциям над числовыми матрицами, т.е. отпадает надобность в выполнении трудоемкой процедуры численного интегрирования.

Порядок расположения элементов в матрице узловых перемещений (II) отличается от принятого ранее для шпангоута. Примем за основу порядок расположения узловых перемещений в шпангоуте и перестроим соответствующим образом матрицу узловых сил и перемещений оболочки.

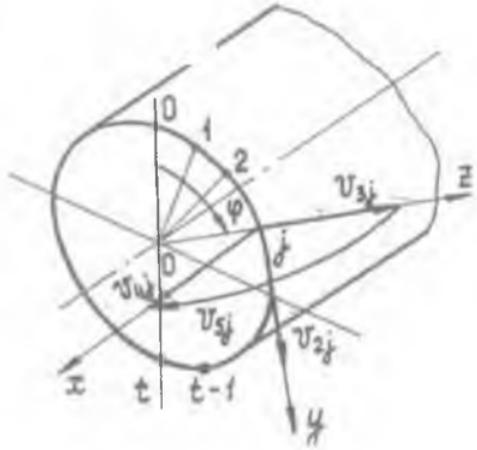


Рис. 2

Для дальнейших рассуждений удобно привести в соответствие размерности матриц узловых сил и перемещений оболочки с размерностью аналогичных матриц для шпангоута, положив для оболочки

$$\begin{aligned} \check{S} &= \{\check{S}_0, \check{S}_1, \dots, \check{S}_j, \dots, \check{S}_t\}, \\ \bar{U} &= \{\bar{U}_0, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_j, \dots, \bar{U}_t\}, \end{aligned} \quad (I3)$$

где  $\bar{U}_j$  имеет вид (2), а

$$\check{S}_j = \{0 \quad S_{2j} \quad S_{3j} \quad S_{4j} \quad S_{5j} \quad 0\}$$

Зависимость между узловыми силами и узловыми перемещениями оболочки запишем в форме

$$\check{S} = K \bar{U} \quad (I4)$$

Здесь

$$K = [K_{j,m}] \quad (j, m = 0, 1, 2, \dots, t) -$$

— преобразованная матрица жесткости оболочки. Входящие в нее подматрицы имеют вид

$${}^v K_{d,m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{K}_{2j,2m} & \check{K}_{2j,3m} & \check{K}_{2j,4m} & \check{K}_{2j,5m} & 0 \\ 0 & \check{K}_{3j,2m} & \check{K}_{3j,3m} & \check{K}_{3j,4m} & \check{K}_{3j,5m} & 0 \\ 0 & \check{K}_{4j,2m} & \check{K}_{4j,3m} & \check{K}_{4j,4m} & \check{K}_{4j,5m} & 0 \\ 0 & \check{K}_{5j,2m} & \check{K}_{5j,3m} & \check{K}_{5j,4m} & \check{K}_{5j,5m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I5)$$

Матрица жесткости системы  $\bar{K}$  может быть теперь построена по классической схеме. В итоге получим

$$\bar{K} = [\bar{K}_{jm}] \quad (j, m = 0, 1, 2, \dots, t), \quad (I6)$$

где

$$\bar{K}_{jm} = \bar{K}_{jm} + {}^v K_{jm}$$

Зная матрицу внешних сил  $Q$ , можно разрешающее уравнение для системы шпангоут-оболочка записать в виде

$$Q = \bar{K} \bar{v}. \quad (I7)$$

Вследствие симметрии напряженно-деформированного состояния системы в подматрицах  $\bar{v}_j$  при  $j = 0$  и  $j = t$  имеются нулевые элементы  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$ ,  $v_{6j}$ . Для определения ненулевых узловых перемещений следует сократить матрицу  $\bar{K}$ , вычеркнув в ней строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям. Тогда разрешающая система алгебраических уравнений примет вид

$$Q_c = K_c v_c, \quad (I8)$$

где  $v_c$  - матрица ненулевых узловых перемещений,  $Q_c$  - соответствующая ей матрица внешних сил,  $K_c$  - сокращенная матрица жесткости системы порядка  $6t \times 6t$

Из решения полученной системы уравнений при заданной внешней нагрузке находятся отличные от нуля узловые перемещения, после чего строится полная матрица  $\bar{v}$ .

По найденным значениям узловых перемещений усилия в элементах шпангоута определяются в соответствии с равенствами (1), (2).

Для оболочки нужно из матрицы  $\bar{U}$  сделать соответствующую выборку и перестроить ее к виду (II). Затем по (I2) находятся амплитудные значения  $u$  перемещений оболочки в торцовом сечении, а по формуле (I0) - коэффициенты рядов (6) для внутренних усилий.

Полученные результаты могут быть в случае необходимости использованы и для определения закона изменения усилий и перемещений вдоль образующих оболочек. Для этого нужно воспользоваться аналитическим решением оболочки при граничных условиях, соответствующих найденным перемещениям (7) торцового сечения.

По изложенному алгоритму была составлена программа на языке "АЛГОЛ-60". Числовые результаты, полученные на ЭВМ М-222, в настоящей статье приведены для случая, когда к шангоуту в точке  $\varphi = \pi$  приложена сосредоточенная сила, параллельная оси оболочки.

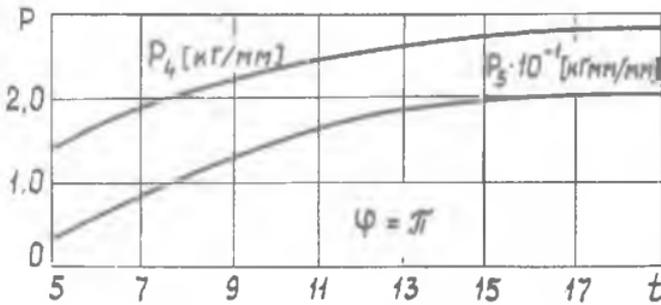


Рис. 3

На рис. 3 показана сходимость решения в зависимости от числа узловых точек на полуокружности шангоута постоянного сечения. Результаты были получены при следующих параметрах системы: радиус срединной поверхности оболочки  $R = 300$  мм, толщина оболочки  $\delta = 1$  мм, размер кольца в направлении образующей оболочки  $a = 30$  мм, толщина кольца  $b = 20$  мм, модуль упругости материала  $E = 2,1 \cdot 10^4$  кг/мм<sup>2</sup>. Из рисунка видно, что значения внутренних усилий в сечении оболочки по стыку со шангоутом стабилизируются уже при числе узловых точек, равном 19.

На рисунках 4 и 5 для тех же размеров кольца и оболочки дано сопоставление результатов расчета, полученных дискретно-аналитическим методом (точки), с аналитическим решением (сплошные линии), выполненным по методике работы [4]. Значения узловых перемещений (рис. 4) уже при 19 узловых точках почти строго совпа-

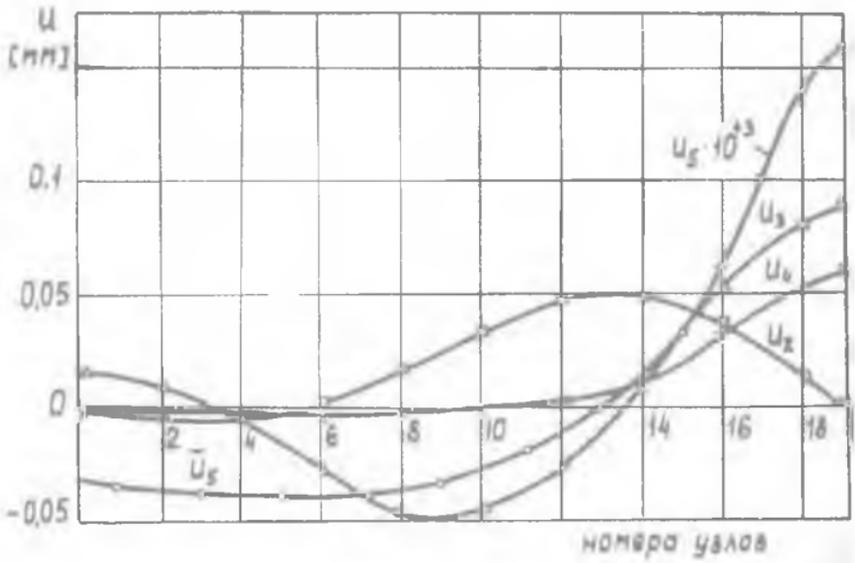


Рис. 4

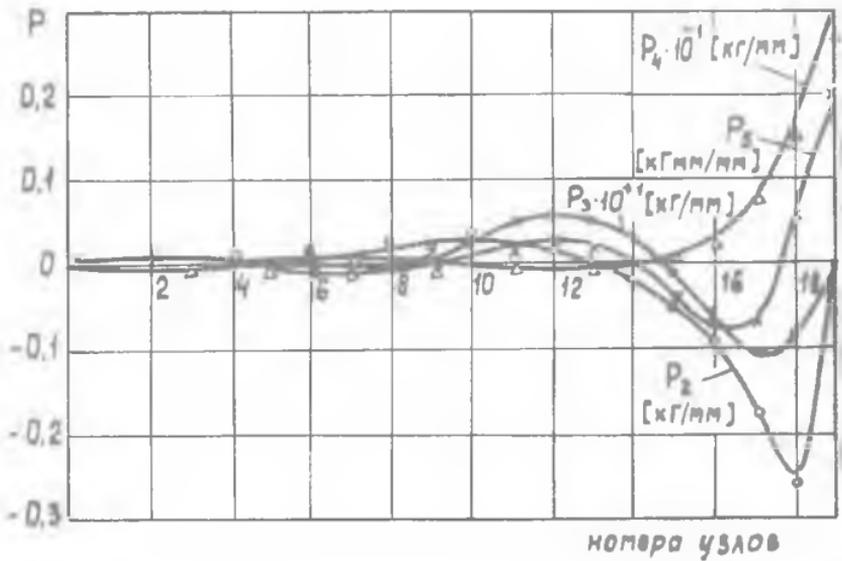


Рис. 5

дают с точным решением. Величины же внутренних усилий в оболочке по линии сопряжения со шпангоутом (рис. 5), подсчитанные дискретно-аналитическим методом, отличаются при этом от точных значений в окрестности приложения внешней нагрузки не более, чем на 6-8%. С увеличением числа узловых точек точность расчета повышается.

Из рисунка 4, в частности, видно, что при выбранных параметрах оболочки и шпангоута осевые перемещения  $u_4$  носят явно выраженный локальный характер. Этому соответствует на рис. 5 резкое нарастание погонной нормальной силы  $P_4$  в окрестности точки приложения внешней нагрузки.

По составленной программе был проведен расчет для случая, когда линейных размер сечения  $a$  изменялся по закону

$$a = a_0 - a_1 \cos \varphi.$$

Принятый закон обеспечивает постоянство объема материала. Параметр  $a_1$  характеризует степень перераспределения материала по контуру шпангоута.

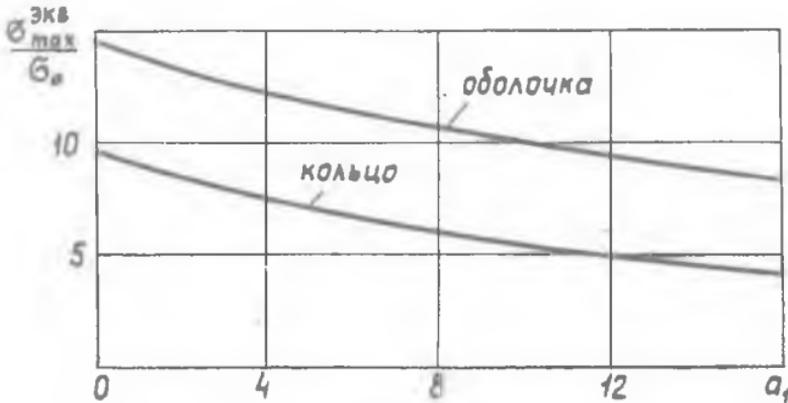


Рис. 6

На рис. 6 показано изменение максимальных эквивалентных напряжений в оболочке и шпангоуте, подсчитанных по теории прочности энергии формоизменения, в зависимости от параметра  $a_1$  при  $a_0 = 20$  мм и  $b = 10$  мм. Эквивалентные напряжения отнесены к максимальным напряжениям в оболочке  $\sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{Q_4}{FRS}$ , вычисленным по балочной теории. Из графиков видно, что за счет перераспределения материала шпангоута можно добиться существенного снижения напряжений в системе (для просчитанных параметров - примерно в 2 раза).

Как показали результаты вычислений, в рассмотренных примерах максимальные значения изгибных напряжений составляют до 50% от напряжений в срединной поверхности, что не может быть выявлено при использовании безмоментной и полубезмоментной теорий оболочек. Заметим, что при использовании разработанного алгоритма расчета удалось ограничиться относительно невысоким порядком разрешающей системы алгебраических уравнений ( $N = 138$ ), чего нельзя достигнуть, если расчленять оболочку на отдельные конечные элементы.

### Л и т е р а т у р а

1. Тюленев А.И. Расчет цилиндрической оболочки и шпангоута на сосредоточенную нагрузку. В сб. "Расчет пространственных конструкций", вып. У, М., Стройиздат, 1959.
2. Захарова А.П. Расчет на изгиб консольной цилиндрической оболочки, подкрепленной упругим кольцом. В сб. "Прочность и динамика авиационных двигателей", вып. 2, "Машиностроение", 1965.
3. Федоров Н.А. Безмоментная цилиндрическая оболочка, подкрепленная кольцами, под действием сосредоточенных сил. В сб. "Исследования по теории пластин и оболочек", вып. УІ-УІІ. Изд. Казанского Госуниверситета, 1970.
4. Тарасов Ю.Л., Логунов В.Я., Широкова В.И. Расчет цилиндрической оболочки, симметрично нагруженной сосредоточенными силами и моментом через упругий шпангоут. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Межвузовский сборник, вып. I, изд. КуАИ, 1974.
5. Бинкевич Е.В., Вергейчик Л.В. К расчету цилиндрической оболочки со шпангоутом переменной жесткости на поперечные нагрузки. В сб. "Самолетостроение и техника воздушного флота", вып. 12, изд-во Харьковского университета, 1967.
6. Федоров Н.А. Безмоментная цилиндрическая оболочка, подкрепленная кольцами переменной жесткости. В сб. "Труды семинара по теории оболочек" Казанского физ-техн. института АН СССР, вып. 3, 1973.
7. Хазанов Х.С., Логунов В.Я. Использование аналитического решения для построения матрицы жесткости цилиндрической оболочки. В сб. "Вопросы прикладной механики в авиационной технике". Труды КуАИ, вып. 77, 1975.
8. Логунов В.Я. Матрица жесткости элемента кривого бруса. В сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Межвузовский сборник, вып. 2, изд. КуАИ, 1975.