ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 3, 1977

УДК 593.3:624.074

И.С.Ахмедьянов

О ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

I. Решение задачи о напряженном и деформированном состоянии сферической оболочки при действии произвольной поверхностной нагрузки [I] может быть сведено к интегрированию следующей системы уравнений:

$$
\begin{gathered}
\nabla^2 \sigma + (1 + i\lambda)\sigma = E_q + i F_q, \\
\frac{\partial W}{\partial \psi} + 2W \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \\
= \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\,\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1+i\lambda}\,\frac{m(1+\mu)}{E} q_x, \\
\frac{\partial Z}{\partial \psi} + 2Z \operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \\
= \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\,\frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1+i\lambda}\,\frac{m(1+\mu)}{E} q_y,
\end{gathered}
\tag{I}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \tau}{\partial \psi} - \tau \operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial t}{\partial \varphi} = W, \\
\frac{\partial t}{\partial \psi} - t \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = Z.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь

$$
\sigma = \varepsilon + \frac{\mu - i\lambda}{\sqrt{(1+\mu)}}\,\varkappa,
$$

$$
W = \zeta - \frac{\mu - i\lambda}{\sqrt{(1-\mu)}}\,\tau, \qquad Z = \omega - \frac{\mu - i\lambda}{\sqrt{(1-\mu)}}\,\chi,
$$

$$r = \frac{u}{R} - \frac{\mu - i\lambda}{\sqrt{(1-\mu)}} \vartheta_1, \quad t = \frac{v}{R} - \frac{\mu - i\lambda}{\sqrt{(1-\mu)}} \vartheta_2,$$

$$E_q = -\frac{m(1-\mu^2)}{E}\left(\frac{\partial q_x}{\partial \psi} + q_x \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial q_y}{\partial \varphi}\right) + \frac{m(1-\mu)}{E} q_z,$$

$$F_q = \frac{\lambda m(1-\mu)}{E} q_z,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \xi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \omega = \varepsilon_{12}$$

$$\varkappa = R(\varkappa_1 + \varkappa_2), \quad \tau = R(\varkappa_1 - \varkappa_2), \quad \chi = 2R\varkappa_{12} - \varepsilon_{12};$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ – компоненты деформации срединной поверхности оболочки;

u, v – касательные компоненты перемещения произвольной точки срединной поверхности оболочки;

q_x, q_y, q_z – компоненты распределенной поверхностной нагрузки;

$$m = \frac{R}{h}, \quad \lambda = \sqrt{12m^2(1-\mu^2) - \mu^2}, \quad \nu = 12m^2;$$

R, h – радиус срединной поверхности и толщина оболочки;

E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

ψ, φ – географические координаты точки срединной поверхности оболочки.

2. Располагая решением уравнений (I), усилия N_1, N_2, S, Q_1, Q_2 и моменты M_1, M_2, H можно вычислить по формулам [2]:

$$N_1 = \frac{N + X}{2}, \quad N_2 = \frac{N - X}{2}, \quad S = \frac{1}{2} Y$$

$$M_1 = \frac{M + U}{2}, \quad M_2 = \frac{M - U}{2}, \quad H = \frac{1}{2} V$$

$$Q_1 = -\frac{Eh}{1+\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\psi}(\varepsilon - \varkappa) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2} R q_x$$

$$Q_2 = -\frac{Eh}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\varepsilon - æ) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_y, \tag{3}$$

в которых

$$N = \frac{Eh}{1-\mu}\varepsilon, \qquad X = \frac{Eh}{1+\mu}\zeta, \qquad Y = \frac{Eh}{1+\mu}\omega$$

$$M = \frac{EhR}{\nu(1-\mu)}æ, \qquad U = \frac{EhR}{\nu(1+\mu)}\tau, \qquad V = \frac{EhR}{\nu(1+\mu)}\chi.$$

3. Приведем частное решение уравнений (I)-(2) для случая, когда компоненты поверхностной нагрузки представлены в виде тригонометрических рядов:

$$(q_x, q_z) = \sum_{n=0}^{\infty}(q_{xn}, q_{zn})\cos n\varphi, \quad q_y = \sum_{n=1}^{\infty} q_{yn}\sin n\varphi. \tag{4}$$

Обозначая это решение через σ_q, W_q, Z_q, r_q, t_q (соответственно ε_q, $æ_q$, ζ_q, τ_q, ω_q, χ_q, u_q, ϑ_{1q}, v_q, ϑ_{2q}) будем иметь:

$$(\sigma_q, W_q, r_q) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_{qn}, W_{qn}, r_{qn})\cos n\varphi \tag{5}$$

или

$$(\varepsilon_q, æ_q, \zeta_q, \tau_q, u_q, \vartheta_{1q}) = \sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_{qn}, æ_{qn}, \zeta_{qn}, u_{qn}, \vartheta_{1qn})\cos n\varphi$$

$$(\omega_q, \chi_q, \vartheta_{2q}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\omega_{qn}, \chi_{qn}, \vartheta_{2qn})\sin n\varphi. \tag{6}$$

Внося (4) и (5) в (I) и (2), получаем неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций σ_{qn}, W_{qn}, Z_{qn}, r_{qn} и t_{qn}. Результат интегрирования этих уравнений позволяет записать следующие выражения для искомых функций.

4. Для функций ζ_{qn}, ω_{qn}, τ_{qn} и χ_{qn} будем иметь ($n \geqslant 0$):

$$\zeta_{qn} = \frac{2(1+\mu)}{\sin^2\psi}(C_{qn}\lambda_n + D_{qn}\mu_n) - \frac{1+\mu}{1-\mu}\varepsilon_{qn} -$$

$$-\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}\left[(\varepsilon_{qn} - æ_{qn})'\operatorname{ctg}\psi - \frac{n^2}{\sin^2\psi}(\varepsilon_{qn} - æ_{qn})\right],$$

$$\omega_{qn} = -\frac{2(1+\mu)}{\sin^2\psi}\left(C_{qn}\lambda_n - D_{qn}\mu_n\right) +$$

$$+\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}\,\frac{n}{\sin\psi}\left[(\varepsilon_{qn}-\varkappa_{qn})\operatorname{ctg}\psi - (\varepsilon_{qn}-\varkappa_{qn})'\right],$$

$$\tau_{qn} = \frac{4m(1+\mu)}{\sin^2\psi}\left(A_{qn}\lambda_n + B_{qn}\mu_n\right) + \varkappa_{qn} -$$

$$-\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}\left[(\varkappa_{qn}+\nu\varepsilon_{qn})'\operatorname{ctg}\psi - \frac{n^2}{\sin^2\psi}(\varkappa_{qn}+\nu\varepsilon_{qn})\right],$$

$$\chi_{qn} = -\frac{4m(1+\mu)}{\sin^2\psi}\left(A_{qn}\lambda_n - B_{qn}\mu_n\right) -$$

$$-\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}\,\frac{n}{\sin\psi}\left[(\varkappa_{qn}+\nu\varepsilon_{qn})\operatorname{ctg}\psi - (\varkappa_{qn}+\nu\varepsilon_{qn})'\right]$$

Здесь

$$A_{qn} = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{q_{xn}}{4E}\,Q_1^n\sin\psi -$$

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{4E}\int_{\pi}^{\psi}\left[\eta_n(q_{xn}+q_{yn}) - \mu_n q_{yn}\right]\sin^2\psi\,d\psi,$$

$$B_{qn} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{q_{xn}}{4E}\,P_1^n\sin\psi -$$

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{4E}\int_{0}^{\psi}\left[\zeta_n(q_{xn}-q_{yn}) + \lambda_n q_{yn}\right]\sin^2\psi\,d\psi,$$

$$C_{qn} = -\frac{1}{6m}A_{qn} - \frac{m}{2E}\int_{\pi}^{\psi}\mu_n(q_{xn}-q_{yn})\sin^2\psi\,d\psi -$$

$$-\frac{m}{2E}\int_{\pi}^{\psi}q_{zn}Q_1^n\sin\psi\,d\psi,$$

$$D_{qn} = -\frac{1}{6m}B_{qn} - \frac{m}{2E}\int_{0}^{\psi}\lambda_n(q_{xn}+q_{yn})\sin^2\psi\,d\psi +$$

$$+ \frac{m}{2E}\int_0^{\psi} q_{x n} P_1^n \sin\psi\, d\psi ,$$

$$\lambda_n(\psi) = tg^n \frac{\psi}{2}, \qquad \mu_n(\psi) = ctg^n \frac{\psi}{2},$$

$$P_1^n(\psi) = (n+\cos\psi)\, tg^n \frac{\psi}{2}, \quad Q_1^n(\psi) = (n-\cos\psi)\, ctg^n \frac{\psi}{2},$$

$$\zeta_n(\psi) = \frac{n(n+\cos\psi)}{\sin^2\psi}\, tg^n \frac{\psi}{2}, \quad \eta_n(\psi) = \frac{n(n-\cos\psi)}{\sin^2\psi}\, ctg^n \frac{\psi}{2}$$

при $n \geqslant 2$. Для $n = 1$ и $n = 0$:

$$A_{q1} + B_{q1} = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{2E}\int_0^{\psi}(q_{x1} - q_{y1}\cos\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$A_{q1} - B_{q1} = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{2E}\, q_{x1}\sin^2\psi,$$

$$C_{q1} + D_{q1} = 2m\,(A_{q1} + B_{q1}),$$

$$C_{q1} - D_{q1} = -\frac{1}{6m}(A_{q1} - B_{q1}) - \frac{m}{E}\int_0^{\psi}(q_{x1}\cos\psi - q_{y1} + q_{z1}\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$A_{q0} = B_{q0} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1}{4E}\, q_{x0}\sin\psi\cos\psi,$$

$$C_{q0} = D_{q0} = -\frac{1}{6m}A_{q0} - \frac{m}{2E}\int_0^{\psi}(q_{x0}\sin\psi - q_{z0}\cos\psi)\sin\psi\, d\psi$$

5. Перемещения u_{qn}, v_{qn} и ϑ_{1qn}, ϑ_{2qn} (при $n \geqslant 2$) будут равны

$$\frac{u_{qn}}{R} = \frac{1+\mu}{1+\lambda^2}(\varepsilon_{qn} - æ_{qn})' + (C^*_{qn}\lambda_n + D^*_{qn}\mu_n)\sin\psi,$$

$$\frac{v_{qn}}{R} = -\frac{1+\mu}{1+\lambda^2}\,\frac{n}{\sin\psi}(\varepsilon_{qn} - æ_{qn}) + (C^*_{qn}\lambda_n - D^*_{qn}\mu_n)\sin\psi, \tag{7}$$

$$\vartheta_{1qn} = -\frac{1+\mu}{1+\lambda^2}(æ_{qn} + \nu\varepsilon_{qn})' + (A^*_{qn}\lambda_n + B^*_{qn}\mu_n)\sin\psi,$$

$$\vartheta_{2qn} = \frac{1+\mu}{1+\lambda^2}\,\frac{n}{\sin\psi}(æ_{qn} + \nu\varepsilon_{qn}) + (A^*_{qn}\lambda_n - B^*_{qn}\mu_n)\sin\psi. \tag{8}$$

В этих выражениях

$$A^*_{qn} = \frac{\nu}{1+\nu}\ \frac{q_{\varkappa n}}{E} m\vartheta_n Q^n_1 \sin\psi +$$

$$+ 2m\vartheta_n A_{qn} - 2m\vartheta_n B_{qn} \mu_n (2\eta_n - \mu_n),$$

$$B^*_{qn} = \frac{\nu}{1+\nu}\ \frac{q_{\varkappa n}}{E} m\vartheta_n P^n_1 \sin\psi -$$

$$- 2m\vartheta_n B_{qn} + 2m\vartheta_n A_{qn} \lambda_n (2\zeta_n - \lambda_n),$$

$$C^*_{qn} = \frac{\nu}{1+\nu}\ \frac{q_{\varkappa n}}{E} m\vartheta_n Q^n_1 \sin\psi +$$

$$+ \vartheta_n (4m A_{qn} - C_{qn}) - \vartheta_n D_{qn} \mu_n (2\eta_n - \mu_n),$$

$$D^*_{qn} = \frac{\nu}{1+\nu}\ \frac{q_{\varkappa n}}{E} m\vartheta_n P^n_1 \sin\psi -$$

$$- \vartheta_n (4m B_{qn} - D_{qn}) + \vartheta_n C_{qn} \lambda_n (2\zeta_n - \lambda_n),$$

$$\vartheta_n = \frac{1+\mu}{2n(n^2-1)}.$$

Формулы (7) справедливы и при $n = 1$ и $n = 0$.

6. Для $n = 1$ и $n = 0$:

$$\vartheta_{1q1} = a - b\cos\psi - \frac{1+\mu}{1+\lambda^2} (\varkappa_{q1} + \nu\varepsilon_{q1})' +$$

$$+ (A^*_{q1} + B^*_{q1}) - (A^*_{q1} - B^*_{q1}) \cos\psi,$$

$$\vartheta_{2q1} = b - a\cos\psi + \frac{1+\mu}{1+\lambda^2}\ \frac{1}{\sin\psi} (\varkappa_{q1} + \nu\varepsilon_{q1}) +$$

$$+ (A^*_{q1} - B^*_{q1}) - (A^*_{q1} + B^*_{q1}) \cos\psi,$$

$$\vartheta_{1q0} = 2a_0 \sin\psi - \frac{1+\mu}{1+\lambda^2} (\varkappa_{q0} + \nu\varepsilon_{q0})' + 2A^*_{q0} \sin\psi$$

$$A^*_{q1} + B^*_{q1} = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\left[\frac{1}{\sin^2\psi}q_{x1} - q_{x1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\int\limits_{\pi/2}^{\psi}(q_{x1}\cos\psi - q_{y1})\frac{d\psi}{\sin^3\psi} +$$

$$+4m(1+\mu)\int\limits_{\pi/2}^{\psi}\left(\frac{2}{\sin^2\psi} - 1\right)\frac{A_{q1}+B_{q1}}{\sin^3\psi}\,d\psi,$$

$$A^*_{q1} - B^*_{q1} = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\,\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi}q_{x1} -$$

$$-2m(1+\mu)\left[\frac{1}{\sin^4\psi}(A_{q1}+B_{q1}) - (A_{q1}+B_{q1})_0\right],$$

$$2A^*_{q0} = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\left[\frac{1}{\sin\psi}q_{x0} - q_{x0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$a = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}q_{x1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - (1+\mu)(C_{q1} - D_{q1})_0,$$

$$b = -2m(1+\mu)(A_{q1} + B_{q1})_0,$$

$$2a_0 = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}q_{x0}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме того,

$$D^*_{q1} = (A^*_{q1} + B^*_{q1}) + \frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\left[\frac{1}{\sin^2\psi}q_{x1} - q_{x1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$

$$+(1+\mu)\left[\frac{1}{\sin^4\psi}(C_{q1} - D_{q1}) - (C_{q1} - D_{q1})_0\right],$$

$$-D^*_{q1} = (A^*_{q1} - B^*_{q1}) + \frac{m(1+\mu)}{E}\,\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi}q_{x1} -$$

$$\frac{m(1+\mu)}{E}\int\limits_{\pi/2}^{\psi}(q_{x1} - q_{y1}\cos\psi + q_{z1}\sin\psi\cos\psi)\frac{d\psi}{\sin^3\psi} +$$

$$+\frac{2m(1+\mu)}{E}\int_{\pi/2}^{\psi}\left(\frac{2}{\sin^2\psi}-1\right)\frac{1}{\sin^3\psi}\int_0^{\psi}(q_{x1}\cos\psi-q_{y1}-q_{z1}\sin\psi)\sin\psi\, d\psi$$

$$2C^*_{q0}=-\frac{2A^*_{q0}}{\nu}-\frac{m(1+\mu)}{E}\int_{\pi/2}^{\psi}\frac{q_{z0}}{\sin\psi}\,d\psi-$$

$$-\frac{2m(1+\mu)}{E}\int_{\pi/2}^{\psi}\frac{1}{\sin^3\psi}\int_0^{\psi}(q_{x0}\sin\psi-q_{z0}\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\,d\psi.$$

Индекс О у скобок означает, что выражение, заключенное в них, вычисляется для значения угла $\psi=\frac{\pi}{2}$.

7. Используя формулу [2]

$$w=\frac{R}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}+u\,\mathrm{ctg}\,\psi+\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)$$

для нормального перемещения w , получаем в соответствии с и (7):

$$w_q=\sum_{n=0}^{\infty}w_{qn}\cos n\varphi,$$

где

$$\frac{w_{qn}}{R}=\frac{\varepsilon_{qn}}{1-\mu}-\frac{1+\mu}{\sin^2\psi}\left(C_{qn}\lambda_n+D_{qn}\mu_n\right)-$$

$$-C^*_{qn}(n+\cos\psi)\,\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}+D^*_{qn}(n-\cos\psi)\,\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}$$

Здесь $n\geqslant 0$.

8. Значения постоянных a , b и $2a_0$ найдены из услови что выполняются равенства [I]

$$\vartheta_{1qn}=\frac{1}{R}\left(u_{qn}-w'_{qn}\right),\qquad \vartheta_{2qn}=\frac{1}{R}\left(v_{qn}+\frac{n}{\sin\psi}w_{qn}\right),$$

при $n=1$ и $n=0$. При $n\geqslant 2$ эти выражения удовлетворяются тождественно.

9. Согласно (3) и (6) будем иметь:

$$Q_{1q}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_{1qn}\cos n\varphi,\qquad Q_{2q}=\sum_{n=1}^{\infty}Q_{2qn}\sin n\varphi$$

Здесь

$$Q_{1qn}=-\frac{Eh}{1-\lambda^2}\left(\varepsilon_{qn}-\varkappa_{qn}\right)-\frac{1-\mu^2}{1-\lambda^2}Rq_{xn},$$

$$Q_{2qn} = \frac{Eh}{1+\lambda^2}\,\frac{n}{\sin\psi}\,(\varepsilon_{qn} - \varkappa_{qn}) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}\,R_{qyn}.$$

10. Добавив к (5) общее решение однородных уравнений, соответствующих (1)-(2) [3], можно получить общее решение системы (1)-(2).

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т. УШ, вып. 6, 1944.

2. Ахмедьянов И.С. Расчет сферических оболочек. В сб."Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Труды КуАИ, вып. 29, Куйбышев, 1967.

3. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки, нагруженной через эксцентрично расположенную жесткую шайбу. В сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Труды КуАИ, вып. 60, Куйбышев, 1973.